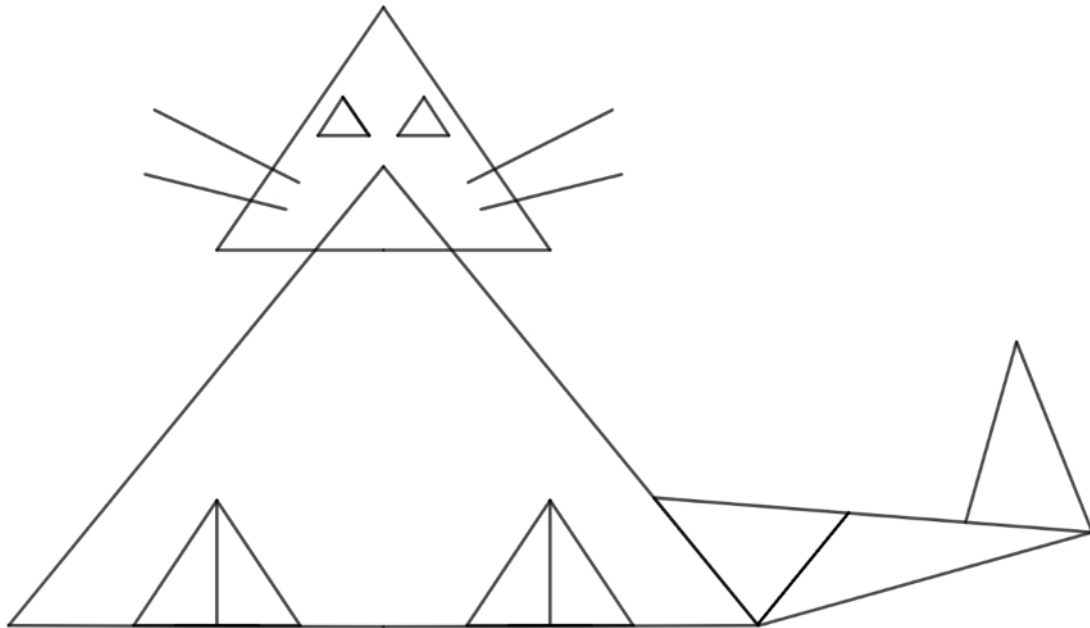


## Répartition des problèmes

	Titre	Niveau	Origine	Tâche
1	<a href="#">Kitty le chat</a>	3 4	LU	Comptage de triangles
2	<a href="#">La récolte de noix I</a>	3 4	PR + FC	Multiples d'un nombre entier
3	<a href="#">De la nourriture pour tous !</a>	3 4 5	SR	Recherche d'itinéraires
4	<a href="#">Plants de fraisières</a>	3 4 5	ARMT	Décomposition d'un nombre en termes additifs
5	<a href="#">Le chamboule-tout</a>	3 4 5	ARMT	Arithmétique : additions
6	<a href="#">Le gâteau de Lucie</a>	4 5	GTCP	Proportionnalité dans les recettes
7	<a href="#">La ferme des animaux</a>	5 6	GTNU	Suite de nombres entiers
8	<a href="#">La pêche aux canards</a>	5 6	GTNU	Décomposition additive des entiers naturels
9	<a href="#">Carreaux dans le grenier</a>	5 6	GTGP	Nombre de carrés dans un rectangle
10	<a href="#">La rue des tilleuls</a>	6 7	GTNU	Numération
11	<a href="#">Parcours à étapes</a>	6 7 8	PR	Proportionnalité
12	<a href="#">Pyramides de verres</a>	6 7 8	PU	Nombres triangulaires
13	<a href="#">Un livre passionnant</a>	6 7 8	PR	Arithmétique et algèbre : équations du premier degré
14	<a href="#">Un beau collage</a>	7 8	GTGP	Géométrie, pavages
15	<a href="#">Invitation à la fête</a>	7 8 9	BL	Vitesse de travail
16	<a href="#">Le gratte-ciel</a>	7 8 9 10	GTNU	Reconstruction d'un tableau
17	<a href="#">Le petit escargot paresseux</a>	8 9 10	PR	Chemin le plus court sur un cube
18	<a href="#">Le carré de Paul</a>	9 10	RV-PR	Géométrie : calcul d'aires
19	<a href="#">Le trapèze de M. Tournesol</a>	9 10	SR	Géométrie et logique : affirmations vraies et fausses à propos d'un trapèze et de deux triangles
20	<a href="#">La grande voile</a>	9 10	SR	Triangles : mesure des angles
21	<a href="#">La récolte de noix II</a>	9 10	PR+FC	Algèbre : équation du second degré
22	<a href="#">Sac de billes</a>	10	LY	Déduction sur le nombre d'éléments de trois ensembles

## 1. KITTY LE CHAT (Cat. 3, 4)

Giulia s’amuse à dessiner son chat Kitty en n’utilisant que des morceaux de lignes droites et en formant des triangles.



**Combien peut-on voir de triangles en tout ?**

**Montrez les triangles que vous avez trouvés.**

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Déterminer le nombre de triangles que l'on peut observer dans une figure composée de segments représentant un chat.

#### Analyse de la tâche

- Après avoir observé que la figure se décompose en triangles distincts, se rendre compte que des triangles « plus petits » sont cachés dans des triangles « plus grands » (cou, pattes et queue), ou que des triangles « plus grands sont formés de triangles « plus petits ».
- compter et « colorier clairement » les triangles trouvés, en évitant les doublons et sans oublis :  
Par exemple : commencer par les grandes parties du corps : 1 corps, 1 cou, 1 tête,  
Ensuite, procéder par étapes :  
1 triangle pour chaque œil, 3 triangles pour chaque patte  
3 « triangles petits » pour la queue  
1 « triangle grand » en rassemblant les « petits triangles »
- faire la somme des nombres de triangles trouvés (15 triangles)

#### Attribution des points

- 4 Réponse correcte (15 triangles) avec un inventaire clair et complet (texte, dessins ou coloriages).
- 3 Réponse correcte (15) avec une présentation peu claire (par exemple, s'il est très difficile de distinguer les différents triangles) ou dessins/explication correctes et détaillés sans mentionner le nombre de triangles : 15.
- 2 Réponse correcte (15 triangles) sans dessins ou explications, ou réponse 14 ou 13 triangles clairement identifiés (texte, dessins ou coloriages).
- 1 Réponse fausse (de 8 à 12 triangles) clairement identifiés (texte, dessins ou coloriages).
- 0 Incompréhension du problème, ou moins de 8 triangles identifiés

**Niveaux :** 3, 4

**Origine :** Luxembourg

## 2. LA RÉCOLTE DES NOIX I (Cat. 3, 4)

C'est la fin de l'été et Pierre observe son verger. Il remarque que les noix commencent à tomber. Il décide alors d'aller, chaque soir, récolter toutes les noix tombées durant la journée.

Le deuxième jour, il récolte le double des noix récoltées le premier jour.

Le troisième jour, il récolte le triple des noix qu'il a récoltées le premier jour.

Pendant ces trois jours, il a récolté 108 noix en tout.

**Combien de noix ont été récoltées le troisième jour ?**

**Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.**

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Déterminer trois nombres entiers dont la somme est égale à 108, tels que le deuxième et le troisième sont respectivement le double et le triple du premier.

#### Analyse de la tâche

- Comprendre que les deux relations données font référence aux noix récoltées le premier jour ; donc, si le nombre de noix récoltées le premier jour était connu, on pourrait déterminer le nombre de noix récoltées les deux jours suivants.
- Procéder alors par essais : par exemple si on récolte 10 noix le premier jour, on en récolte 20 le second et 30 le troisième, mais  $10+20+30=60$  qui est trop peu. Si on essaie avec 20 noix le premier jour, la somme ferait 120, plus grande que les noix récoltées au total. Il faut donc essayer avec des valeurs comprises entre 10 et 20 jusqu'à en conclure qu'il a récolté 18 noix le premier jour, 36 noix le second et 54 noix le troisième jour.

Ou bien

On peut limiter le nombre d'essais en se focalisant sur les noix récoltées le troisième jour. Ce nombre doit être un multiple de 3 et puisque c'est le plus grand nombre des trois, on peut partir des multiples de 3 plus grands que 30 en écrivant les nombres à partir de 30 : 30, 33, 36, 39, 42, .... 54, 57, 60.

Ou bien par voie pré algébrique

Représenter graphiquement avec un point ou un autre symbole le nombre de noix récoltées le premier jour, celles récoltées le deuxième jour seront alors représentées avec deux symboles, celles du troisième jour avec trois symboles, reconnaître ensuite que le somme est constituée de 6 symboles identiques. Calculer  $108 \div 6=18$  pour trouver que les noix récoltées le troisième jour sont  $18 \times 3 = 54$ .

Ou bien

Considérer le fait que le triple d'un nombre est la somme du nombre et de son double : le nombre de noix récoltées le troisième jour est égal à la somme du nombre de noix récoltées les deux jours précédents. Le nombre de noix récoltées est donc égal à la moitié du nombre total de noix récoltées. Ensuite, le calcul  $108 \div 2$  donne le nombre de noix récoltées le troisième jour.

#### Attribution des points

- 4 Réponse correcte (il récolte 54 noix le troisième jour) avec une description claire de la procédure suivie (par essais, en montrant au moins deux tentatives en plus de celle correcte, ou bien par procédure pré algébrique avec des calculs).
- 3 Réponse correcte avec une description incomplète ou peu claire de la procédure avec un seul essai autre que celle correcte. Ou bien pas de réponse mais explication du nombre de noix récoltées pendant chacun des trois jours, avec une procédure correcte.
- 2 Réponse correcte sans description de la procédure mais avec vérification claire du nombre de noix récoltées les autres jours, Ou bien réponse fausse à cause d'une seule erreur de calcul, mais procédure correcte.
- 1 Réponse correcte sans explication de la procédure ni vérification, ou bien début de recherche cohérente, ou bien réponse fausse due à plusieurs erreurs de calculs, mais avec un début de raisonnement correct.
- 0 Incompréhension du problème.

Niveaux : 3, 4

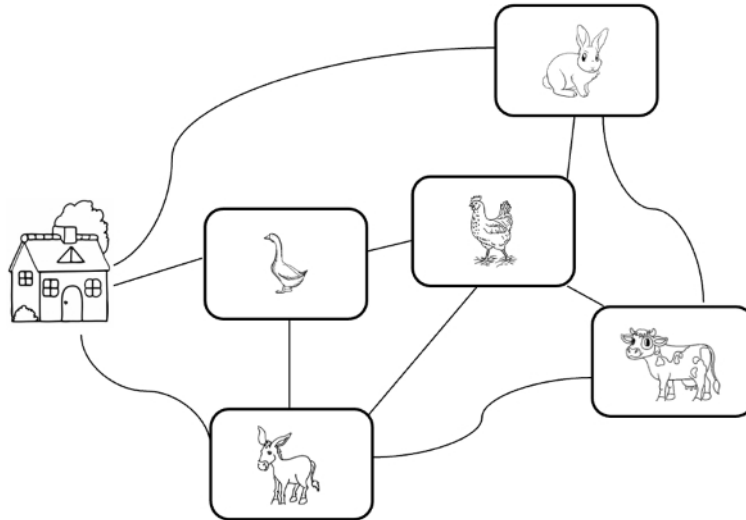
Origine : Parma + Franche-Comté

### 3. DE LA NOURRITURE POUR TOUS ! (Cat. 3, 4, 5)

Francesco vit dans une ferme et doit chaque jour distribuer de la nourriture à ses animaux. Les animaux sont situés dans cinq enclos reliés entre eux par des chemins.

Francesco part de sa maison, traverse chaque enclos puis rentre chez lui.

Il suit les chemins et ne passe jamais deux fois par le même enclos.



**Combien de parcours différents peut-il faire ?**

**Décrivez avec précision les parcours possibles de Francesco.**

#### ANALYSE A PRIORI

##### Tâche mathématique

Répertorier tous les parcours différents partant d'un point, reliant les 5 nœuds d'un réseau sans passer deux fois par le même et revenant au point de départ.

##### Analyse de la tâche

- Se rendre compte que Francesco ne doit traverser chaque enclos qu'une seule fois en empruntant les chemins et en partant de la maison pour y revenir à la fin.
- Trouver une manière de lister toutes les solutions : dessins, listes, abréviations...
- Procéder par essais plus ou moins organisés.
- Noter : O = oie, P = poule, A = âne, L = lapin, V = vache
- Se rendre compte qu'il y a 10 solutions, car chacun des 5 parcours peut être suivi dans un sens ou dans l'autre.
- OPLVA, OAVPL, OPAVL, OAPVL, AOPVL, AVLPO, LPVAO, LVPOA, LVAPO, LVPAO

##### Attribution des points

- 4 Les 10 parcours décrits ou dessinés de manière claire sans erreur ni doublon.
- 3 Les 10 parcours décrits ou dessinés de manière claire avec au maximum deux erreurs ou doublons ou 8 ou 9 parcours décrits ou dessinés de manière claire sans erreur ni doublon.
- 2 Réponse « 10 parcours » sans aucune description ou 8 ou 9 parcours décrits ou dessinés de manière claire qui comprennent au maximum deux erreurs ou doublons ou 6 ou 7 parcours décrits ou dessinés de manière claire sans erreur ni doublon.
- 1 6 ou 7 parcours décrits ou dessinés de manière claire qui comprennent au maximum deux erreurs ou doublons ou 4 ou 5 parcours décrits ou dessinés de manière claire sans erreur ni doublon.
- 0 Moins de 4 parcours ou incompréhension du problème.

**Niveaux :** 3, 4, 5

**Origine :** Suisse Romande

#### 4. PLANTS DE FRAISIERS (Cat. 3, 4, 5)

M. et M<sup>me</sup> Rossi ont acheté 40 plants de fraisiers pour les planter dans leur jardin. Ils travaillent avec leurs trois enfants : Anna, Berta et Carlo.

Après une demi-heure de travail, chacun a planté le même nombre de plants de fraisiers.

Ils font une pause. Après la pause, les enfants vont jouer et les parents terminent le travail en plantant chacun dix autres plants.

**Combien de plants de fraisiers chaque membre de la famille a-t-il plantés ?**

**Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.**

---

#### ANALYSE A PRIORI

##### Tâche mathématique

Décomposer 40 en somme de cinq nombres dont trois sont égaux et les deux autres valant chacun dix de plus que les trois premiers.

##### Analyse de la tâche

- Comprendre la situation : cinq membres d'une famille plantent 40 plants de fraisiers au total ; chaque parent plante dix plants de plus que ses enfants.
- Faire quelques essais (avec ou sans dessin, organisés ou non) à partir du nombre de plants plantés la première demi-heure par chaque membre de la famille : 1, 2, 3 ... ; ajouter 10 + 10 à la somme et vérifier si l'on atteint 40 :  $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 10 + 10 = 25$  non,  $2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 10 + 10 = 30$  non, ...,  $4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 10 + 10 = 40$  oui.

Ou bien

- Partir du total de 40 plants, soustraire les 20 plants plantés par les parents, et répartir le reste entre les cinq personnes (addition ou multiplication ou division par 5)
- En déduire que dans la première demi-heure tout le monde plante 4 plants, pour un total de 20 plants. Après la pause, les parents plantent encore 10 plants chacun ; donc 40 plants ont été plantés au total (4 plants pour chacun des trois enfants et 14 plants pour chacun des deux parents).

##### Attribution des points

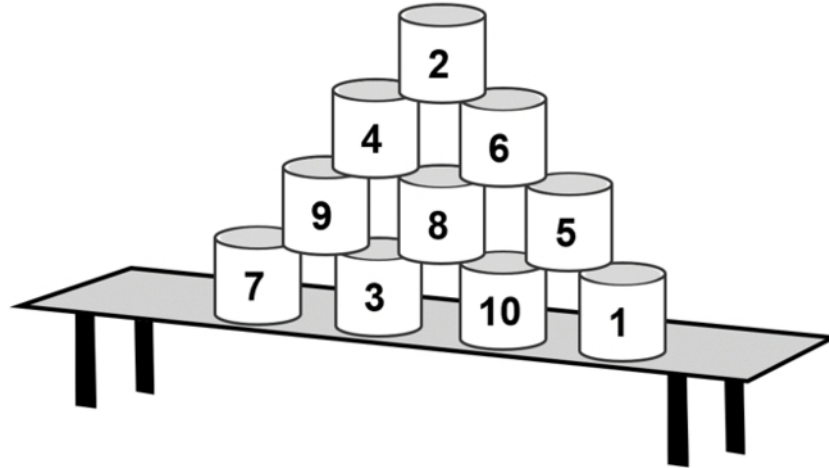
- 4 Réponse correcte (4 plants pour les enfants et 14 plants pour les parents) avec une procédure basée sur des opérations ou des essais (au moins deux)
- 3 Réponse correcte avec une description incomplète ou seulement une vérification " $4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 10 + 10 = 40$ ".
- 2 Réponse correcte sans description ni vérification ou réponse fautive à cause d'une erreur de calcul
- 1 Début de raisonnement correct
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4, 5

Origine : variante de *C'est le printemps* (22.II.04; Cat. 3-5)

## 5. LE CHAMBOULE-TOUT (Cat. 3, 4, 5)

À la fête du village, il y a un jeu, le chamboule-tout, qui consiste à lancer des balles sur des boîtes numérotées de 1 à 10 et disposées en pyramide, comme sur la figure.



Quand une balle touche une boîte, elle tombe. Et quand une boîte tombe, les boîtes posées dessus tombent aussi. On additionne les numéros des boîtes tombées et on obtient le score du joueur. La pyramide est ensuite reconstruite en disposant les boîtes de la même façon et le jeu recommence.

Giulia, Marc, Hortense et Abdel lancent chacun une balle.

Giulia obtient 20 points en touchant la boîte numéro 8 (qui soutient les trois boîtes numéro 4, numéro 6 et numéro 2).

Marc obtient 15 points en touchant la boîte numéro 9 (qui soutient les boîtes numéro 4 et numéro 2).

Hortense a obtenu 10 points de plus qu'Abdel.

**Quel peut être le numéro de la boîte qu'Hortense a touchée avec sa balle ?**

**Quel peut être le numéro de la boîte qu'Abdel a touchée avec sa balle ?**

**Montrez comment vous les avez trouvés.**

---

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Trouver, selon les règles d'un jeu, deux sommes de nombres de 1 à 10 telles que l'une vaut 10 de plus que l'autre.

#### Analyse de la tâche

- Regarder les exemples et comprendre comment tombent les boîtes : celle qui est touchée entraîne dans sa chute non seulement celle qui est immédiatement au-dessus, mais aussi celle qui est posée sur celle-ci et ainsi de suite.
- Faire des essais plus ou moins organisés pour trouver la solution. Si elles sont touchées, les boîtes n°4 et n°6 ne font tomber que la boîte n°2. Pour les boîtes n°8 et n°9, la somme est déjà connue. Pour les boîtes qu'il reste à toucher, on obtient les sommes suivantes :

$$7 + 9 + 4 + 2 = 22$$

$$3 + 9 + 8 + 4 + 6 + 2 = 32$$

$$10 + 8 + 5 + 4 + 6 + 2 = 35$$

$$1 + 5 + 6 + 2 = 14$$

$$5 + 6 + 2 = 13$$

- Observer, à partir des calculs effectués, que ce n'est qu'en touchant les boîtes n°7 et n°3 qu'on obtient des scores dont la différence est 10 ( $32 - 22 = 10$ ). Ainsi, Abdel touche la boîte n°7 et Hortense touche la boîte n°3.

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (Abdel touche la boîte n°7 et Hortense touche la boîte n°3) avec des explications claires et complètes, c'est-à-dire le calcul des sommes obtenues pour la chute de chacune des boîtes.
- 3 Réponse correcte, mais il manque la somme relative à une ou deux boîtes.
- 2 Réponse correcte sans explication  
ou réponse fautive à cause d'une erreur de calcul mais calcul de toutes les sommes,  
ou réponse : « Abdel a obtenu 22 points et Hortense 32 points ».
- 1 Réponse fautive à cause d'une erreur de calcul mais sans le calcul de toutes les sommes  
ou début de recherche cohérent qui montre que le texte a été compris.
- 0 Incompréhension du problème.

**Niveaux :** 3, 4, 5

**Origine :** nouvelle version de *La noce à Thomas* (03.F.01; cat 3-5)

**6. LE GÂTEAU DE LUCIE** (Cat. 4, 5)

Aujourd'hui, Lucie veut préparer un gâteau en suivant la recette de sa grand-mère :

- 6 œufs,
- 450 g de farine,
- 150 g de sucre,
- 120 g de beurre,
- 3 dL de lait.

Elle se rend compte qu'elle a seulement 2 œufs et qu'elle devra donc adapter la quantité des autres ingrédients pour pouvoir réaliser son gâteau.

**Combien de farine, de sucre, de beurre et de lait Lucie doit-elle utiliser pour adapter la recette ?**

**Expliquez comment vous avez trouvé la réponse.**

---

**ANALYSE A PRIORI****Tâche mathématique**

Adapter une recette dont les quantités initiales d'un ingrédient ont été modifiées en déterminant proportionnellement la quantité des ingrédients restants.

**Analyse de la tâche**

- Comprendre que la situation met en relation différentes quantités : nombre d'œufs et quantité de farine, sucre, beurre et lait.
- Comprendre que la quantité respective d'ingrédients doit être diminuée proportionnellement au nombre d'œufs dont Lucie dispose.
- Se rendre compte que 2 œufs représentent un tiers de la quantité de la recette de base et que donc il faut également utiliser un tiers des autres ingrédients : donc pour la farine  $450 \div 3 = 150$  (en grammes), pour le sucre  $150 : 3 = 50$ , pour le beurre  $120 : 3 = 40$ , pour le lait  $3 : 3 = 1$  (en décilitres).
- Les doses avec lesquelles Lucie pourra réaliser un gâteau comme celui de sa grand-mère avec 2 œufs sont : 150 g de farine, 50 g de sucre, 40 g de beurre et un décilitre de lait.

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (50 g de sucre, 150 g de farine, 40 g de beurre et 1 dL de lait) avec explications claires et complètes.
- 3 Réponse correcte (50 g de sucre, 150 g de farine, 40 g de beurre et 1 dL de lait) avec explications peu claires ou calculs incomplets (par exemple : indication de la procédure suivie pour trouver la quantité d'un ou deux seulement des ingrédients).
- 2 Réponse correcte (50 g de sucre, 150 g de farine, 40 g de beurre et 1 dl de lait) mais sans explication.
- 1 Début de raisonnement correct, par exemple comprendre qu'il faut modifier (diminuer) aussi la quantité des autres ingrédients.
- 0 Incompréhension du problème.

**Niveaux :** 4, 5

**Origine :** GTCP (groupe de travail calcul et proportionnalité)

## 7. LA FERME DES ANIMAUX (Cat. 5, 6)

Dans sa ferme, un agriculteur possède 200 animaux de cinq espèces différentes : des vaches, des chevaux, des moutons, des poules et des canards.

Il y a 4 chevaux de plus que de vaches.

Il y a 5 moutons de plus que de chevaux.

Il y a 6 canards de plus que de moutons.

Il y a 12 poules de plus que de canards.

**Combien d'animaux de chaque espèce y a-t-il dans la ferme ?**

**Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.**

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Rechercher le premier terme d'une suite de cinq nombres qui augmentent d'une quantité non constante et de somme connue.

#### Analyse de la tâche

- Comprendre la situation :
  - \* les animaux sont de cinq espèces,
  - \* les effectifs de chaque espèce sont liés les uns aux autres, ils sont tous différents et les vaches sont les moins nombreuses,
  - \* la séquence des nombres d'animaux de chaque espèce est indiquée dans le texte par ordre croissant.
- Procéder par essais et erreurs en fixant par exemple le nombre de vaches et en calculant, en conséquence, le nombre des autres animaux ; comparer la somme des cinq nombres obtenus avec le total (200) des animaux de la ferme jusqu'à trouver la bonne séquence.

Au cours de cette procédure, des régularités peuvent être découvertes, par exemple si on augmente le nombre de vaches d'une unité, la somme des termes de la suite augmente de 5, il est possible d'accélérer la recherche en considérant la distance par rapport au total.

Ou bien,

- Comprendre que les moutons sont 9 de plus que les vaches ( $4 + 5$ ), les canards sont 15 de plus que les vaches ( $9 + 6$ ), les poules 27 de plus que les vaches ( $15 + 12$ ) ; additionner tous ces nombres  $4 + 9 + 15 + 27 = 55$  et calculer  $(200 - 55) \div 5 = 29$  qui est le nombre de vaches ; calculer ensuite le nombre des autres types d'animaux : 33 chevaux ( $29 + 4$ ), 38 moutons ( $29 + 9$ ), 44 canards ( $29 + 15$ ) et 56 poules ( $29 + 27$ ).

Ou bien,

- Procéder en estimant la valeur moyenne, 40 ( $200 \div 5$ ) des nombres de la séquence, l'attribuer au nombre de moutons qui sont en position centrale, et ajuster le « jet » en tenant compte des contraintes.

Ou avec une procédure algébrique :

- Représenter par une lettre ou un symbole le nombre de vaches et exprimer les quatre relations en utilisant ce symbole, en écrivant que le nombre d'animaux est égal à la somme de 5 fois ce symbole et de 55 (en fait l'équation  $5n + 55 = 200$ ).
- Conclure que le nombre de vaches est de 29.

#### Attribution des points

- 4 Bonne réponse (29 vaches, 33 chevaux, 38 moutons, 44 canards et 56 poules) avec description de la procédure suivie.
- 3 Réponse correcte mais avec une description peu claire ou incomplète de la procédure suivie.  
Ou réponse incorrecte pour une seule espèce due à une erreur de calcul.  
Ou bien le nombre de vaches est correctement indiqué avec une description claire et les autres valeurs calculées correctement mais il y a une confusion dans l'attribution des nombres aux autres animaux.
- 2 Bonne réponse sans description de la procédure ou seulement le nombre de vaches correctement indiqué.  
Ou réponse incorrecte en raison de multiples erreurs de calcul mais procédure correcte.
- 1 Début d'un raisonnement correct.
- 0 Incompréhension du problème.

Niveaux : 5, 6

Origine : GTNU (groupe de travail numération)

## 8. LA PÊCHE AUX CANARDS (Cat. 5, 6)

Au parc d'attractions *Transalpino*, Luc et Anne jouent à la pêche aux canards.

Dans le bac, il y a 50 canards, numérotés de 1 à 50.

La règle du jeu est la suivante : pêcher 8 canards et additionner les numéros.

Luc joue en premier et obtient 36 points.

Anna joue ensuite et obtient 56 points.

Luc dit : « Tu as fait beaucoup plus de points que moi, et pourtant nous avons beaucoup de canards avec les mêmes numéros !! ».

Anna répond : « Nous avons effectivement six numéros identiques, mais j'ai les numéros 11 et 15 et toi, tu en as deux autres. »

**Quels peuvent être les numéros des deux canards pêchés par Luc qui sont différents de ceux d'Anna ?**

**Écrivez toutes les possibilités et montrez comment vous les avez trouvées.**

---

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Trouver huit nombres entiers différents entre eux ayant pour somme 36 et sachant que quand on ajoute 11 et 15 à six d'entre eux, la somme sera égale à 56.

#### Analyse de la tâche

- Pour s'approprier la situation, utiliser toutes les contraintes données dans le texte du problème, ainsi que celles non explicites :
  - il y a 50 canards qui utilisent tous les nombres de 1 à 50.
  - les canards pêchés sont tous remis dans le bac après la fin de chaque jeu.
  - Luc et Anne ont pêché 6 canards avec les mêmes numéros mais aussi 2 canards avec des numéros différents.
- Comprendre que la somme 36 peut seulement s'obtenir avec les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8
- Comprendre que la nouvelle somme 56 s'obtient par l'addition de 8 nombres, dont deux sont 11 et 15 et les autres sont à choisir parmi les nombres de 1 à 8.
- Constater que la différence entre les deux sommes totales est égale à 20 ( $=56 - 36$ ) et que la somme des deux nouveaux canards est 26 ( $= 11 + 15$ ), et donc la somme des canards remplacés est égale à 6 ( $= 26 - 20$ ).
- Ou bien, en considérant la différence 30 ( $= 56 - 26$ ) entre le total des points et la somme des numéros 11 et 15 des canards pêchés par Anna. Cette différence est justement égale à la somme des six numéros pêchés aussi bien par Anne que par Luc et donc 6 ( $= 36 - 30$ ) est la somme des numéros des canards pêchés par Luc et non par Anne.
- Considérer les couples de nombres entiers différents et plus grands que zéro dont la somme est 6, (0 ; 6) et (3 ; 3) non acceptables et déduire que les uniques couples possibles sont (1 ; 5) (2 ; 4)
- Déduire que les différents canards pêchés par Luc sont le numéro 1 et le numéro 5 ou bien le numéro 2 et le numéro 4

Ou bien procéder par essais plus ou moins organisés

#### Attribution des points

- 4 Réponse correcte (les couples (1;5) et (2;4)) avec des explications détaillées de la procédure suivie.
- 3 Réponse correcte et complète avec des explications peu claires ou incomplètes
- 2 Réponse correcte sans explications
  - Ou bien une seule possibilité avec des explications claires
  - Ou bien des explications correctes mais réponses fausses à cause d'erreurs de calculs
- 1 Une seule possibilité sans explications
  - Ou bien début de la résolution correcte, par exemple que 36 est la somme des huit premiers nombres entiers
  - Ou bien que 30 est la somme des numéros pêchés aussi bien par Anne que par Luc.
- 0 Incompréhension du problème

**Niveaux :** 5, 6

**Origine :** GTNU (groupe de travail numération, à partir du problème *La squadra di calcio* 11.F.06)

## 9. CARREAUX DANS LE GRENIER (Cat. 5, 6)

Sara a trouvé des carreaux carrés de 20 cm de côté dans son grenier.

Elle commence à les disposer sur le sol, entiers, côte à côte, sans espace entre eux.

A un certain moment, elle se rend compte qu'en utilisant tous les carreaux, elle peut former un rectangle de 280 cm de long et 140 cm de large.

**Combien de carreaux Sara a-t-elle trouvés dans son grenier ?**

**Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.**

---

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Trouver combien de carrés entiers de 20 cm de côté seront nécessaires pour recouvrir exactement un rectangle de 140 cm sur 280 cm.

#### Analyse de la tâche

- L'appropriation de la situation est simple : Sara aligne des carreaux carrés les uns à côté des autres et les uns en-dessous ou au-dessus des autres pour former le rectangle demandé. Il est demandé de déterminer le nombre de carreaux utilisés.
- Il y a trois nombres en présence : 20, 140 et 280 qui sont des mesures en cm des « côtés » de carreaux ou du rectangle. Il s'agit pour l'élève de décider que faire de ces trois mesures (nombres associés à une unité de longueur et non plus « figure géométrique »). L'idée la plus évidente est de trouver combien de fois le côté du carreau en cm (20) est dans la largeur du rectangle (140) et dans sa longueur (280) puis de déterminer ce « combien de fois » par une division ou une addition répétée ou par un dessin pour obtenir 7 et 14.
- Réfléchir à la signification de ces nombres 7 et 14. Dans le cas de la procédure utilisant un dessin, la *vision* de l'alignement des carreaux en lignes et colonnes conduit à la multiplication  $7 \times 14 = 98$  ou à la répétitions d'additions  $14 + 14 + 14 + 14 + 14 + 14 + 14 = 98$ .
- Dans le cas d'absence de signification ou de « sens », il peut arriver que les deux opérations  $7 \times 14$  ou  $7 + 14$  soient choisies indifféremment, c'est pourquoi il est important que le choix de l'opération soit « décrit ».

Ou bien,

- Diviser l'aire du rectangle ( $280 \text{ cm} \times 140 \text{ cm} = 39\,200 \text{ cm}^2$ ) par l'aire d'un carreau ( $20 \text{ cm} \times 20 \text{ cm} = 400 \text{ cm}^2$ ) :  $39\,200 \div 400 = 98$ . Cette procédure sera peu utilisée dans ces catégories en raison de la difficulté des *grands nombres* et parce qu'elle fonctionne dans l'espace à deux dimensions où la notion d'aire n'est souvent pas encore assimilée.

#### Attribution des points

- 4 Réponse correcte (98 carreaux) avec description claire de la procédure (qui peut aussi être un dessin).
- 3 Réponse correcte (98 carreaux) avec description peu claire ou incomplète.
- 2 Réponse correcte (98 carreaux) sans aucune description, ou réponse erronée (avec procédure correcte) due à une erreur de calcul, ou à une ligne ou une colonne manquante dans le dessin.
- 1 Début de recherche correct avec le calcul de l'aire du rectangle ou de l'aire d'un carreau ou du nombre de carreaux sur chaque côté du rectangle (7 et 14).
- 0 Incompréhension du problème.

**Niveaux :** 5, 6

**Origine :** GTGP. Le problème consiste à comparer des figures unidimensionnelles et bidimensionnelles (1D et 2D) Duval, Alghero-Gazzetta n. 10).

**10. LA RUE DES TILLEULS** (Cat. 6, 7)

Jean parcourt la route des tilleuls, une piste cyclable de 12,5 km de long.

D'un côté de la piste, il y a des tilleuls disposés tous les 10 m, et des fontaines à eau disposées tous les 1 000 m.

Quand il y a une fontaine, il n'y a pas de tilleul.

Au début de la piste, il y a un tilleul et la première fontaine se trouve 1 000 mètres plus loin.

**Combien de fontaines et combien de tilleuls Jean rencontre-t-il le long du parcours ?**

**Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.**

**ANALYSE A PRIORI****Tâche mathématique**

Compter le nombre de milliers et de dizaines dans un nombre (12 500)

**Analyse de la tâche**

- S'approprier la situation. Il peut être utile de comprendre qu'il s'agit du système de numération en base 10, il faut compter le nombre de milliers et le nombre de dizaines dans le nombre 12 500.
- Comprendre qu'il y a une fontaine pour chaque kilomètre et que, comme la piste mesure 12,5 km de long, il y aura 12 fontaines.
- Comprendre que dans 12,5 km il devrait y avoir 1 250 tilleuls ( $12\,500 \div 10$ ) et que, puisque 1 000 est un multiple de 10, à chaque kilomètre, en plus de la fontaine, il devrait y avoir un tilleul. Mais, comme là où il y a une fontaine, il n'y a pas de tilleul, il y aura 1 238 tilleuls ( $1\,250 - 12$ ). À ceux-ci il faut ajouter le tilleul situé au début de la piste cyclable et donc 1 239 tilleuls au total.

Ou bien,

- À l'aide d'un dessin ou d'un schéma si nécessaire, comprendre que dans chaque kilomètre (1 000 m) il y a 99 tilleuls ( $100 - 1$ ), car tous les 1 000 m seule la fontaine doit être présente et pas le tilleul.
- En déduire que si tous les 1 000 m il y a 99 tilleuls, sur 12 km (12 000 m) il y aura  $99 \times 12 = 1\,188$  tilleuls et dans les 0,5 km (500 m) restants il y aura encore 50 tilleuls.
- Faire la somme :  $1\,188 + 50 + 1$  du début = 1 239.

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (1 239 tilleuls et 12 fontaines) avec une explication complète de la procédure.
- 3 Réponse correcte avec une explication incomplète ou peu claire.  
Ou réponse 1 238 à cause de l'oubli de l'arbre initial.
- 2 Réponse correcte sans explication.  
ou réponse correcte pour uniquement une des deux demandes (nombre de tilleuls ou nombre de fontaines) mais avec explication.
- 1 Début de recherche cohérente,  
ou réponse correcte pour uniquement une des deux demandes (nombre de tilleuls ou nombre de fontaines), mais sans explication.
- 0 Incompréhension du problème.

**Niveaux :** 6, 7

**Origine :** GTNU

## 11. PARCOURS À ÉTAPES (Cat. 6, 7, 8)

Le Cyclo-Club Transalpin prépare une course cycliste.

Les organisateurs décident que le parcours doit faire au moins 40 km, mais pas plus de 60 km.

Ils décident également que le parcours sera divisé en trois étapes et que la longueur de chaque étape sera un nombre entier de kilomètres.

La longueur de la première étape doit être égale au tiers de la longueur de la deuxième étape et la moitié de celle de la troisième.

**Trouvez la longueur de chaque étape.**

**Indiquez toutes les possibilités et montrez comment vous avez trouvé vos réponses.**

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Déterminer des triplets d'entiers dont le premier est le tiers du deuxième et la moitié du troisième, sachant que dans chaque triplet la somme des nombres doit être comprise entre deux nombres fixés.

#### Analyse de la tâche

- Comprendre que, pour déterminer la longueur des trois étapes en km, il faut déterminer trois nombres dont la somme est supérieure ou égale à 40 et inférieure ou égale à 60 et tels que le premier soit le tiers du deuxième et la moitié du troisième. Cela signifie aussi que le deuxième est le triple du premier et le troisième est le double du premier.
- Procéder par ajustement d'essais successifs en choisissant une valeur pour la longueur de la première étape. Par exemple, on commence par une première étape de 5 km, la deuxième est alors de 15 km et la troisième 10 km, la somme des étapes est de 30 km, donc il est nécessaire d'augmenter le nombre de km de la première étape. On essaie alors avec 6 km et on continue avec tous les entiers jusqu'à ce que la somme soit comprise entre 40 km et 60 km.
- On trouve ainsi toutes les solutions : 7, 21, 14 dont la somme est 42 ; 8, 24, 16 dont la somme est 48 ; 9, 27, 18 dont la somme est 54 et enfin 10, 30, 20 dont la somme est 60.

Ou bien,

- Comprendre que si l'on considère la première étape comme base, la seconde est trois fois la première et la troisième est deux fois la première. Le parcours total est donc composé de six fois la première étape (c'est-à-dire qu'il est composé de six parties de même longueur). On peut représenter graphiquement la situation, par exemple en dessinant des segments de longueur proportionnelle à la longueur des étapes.
- Comprendre alors que la longueur du parcours doit être un nombre de km multiple de 6. Chercher alors les multiples de 6 compris entre 40 et 60 : 42, 48, 54 et 60.
- Diviser chaque multiple par 6 pour trouver la longueur de la première étape, puis multiplier cette longueur par 3 et 2 pour trouver respectivement les longueurs de la deuxième et de la troisième étape.

#### Attribution des points

- 4 Réponse correcte (7, 21, 14 ; 8, 24, 16 ; 9, 27, 18 et 10, 30, 20) avec une description claire et complète de la procédure (essais, recherche de multiples de 6, représentation graphique).
- 3 Réponse correcte avec une description peu claire ou incomplète, ou identification de trois solutions avec une description claire et complète de la procédure suivie.
- 2 Identification de quatre ou trois solutions sans description de la procédure, ou identification de deux solutions avec une description claire et complète de la procédure suivie, ou au moins deux solutions et également une réponse incorrecte due à une erreur de calcul avec une description de la procédure.
- 1 Identification de deux solutions sans description de la procédure ou au moins deux réponses correctes et également deux réponses incorrectes dues à une erreur de calcul sans description de la procédure, ou une seule solution identifiée avec une description claire et complète de la procédure suivie sans solution incorrecte, ou début de recherche correct (quelques essais).
- 0 Une seule solution sans description de la procédure et réponse incorrecte, ou incompréhension du problème.

**Niveaux :** 6, 7, 8

**Origine :** Parma

## 12. PYRAMIDES DE VERRES (Cat. 6, 7, 8)

Lucas est très habile dans son travail de serveur. Il est capable de remplir plusieurs verres en même temps après les avoir disposés en pyramide sur plusieurs étages.

L'image montre une pyramide à 3 étages composée de 6 verres : 3 au premier étage, 2 au deuxième et 1 au troisième.

Une pyramide à 4 étages comportera donc 4 verres au premier étage, 3 verres au deuxième étage et un de moins à chacun des étages suivants. Les pyramides ayant un autre nombre d'étages seront construites selon la même méthode.



À l'occasion d'une grande fête dans son restaurant, Lucas utilise les 423 verres dont il dispose pour construire le plus grand nombre possible de pyramides à 8 étages.

Avec tous les verres qui lui restent, il construit d'autres pyramides d'au moins 2 étages.

**Combien de pyramides de verres à 8 étages Lucas a-t-il construites ?**

**Combien d'étages doit avoir chacune des autres pyramides si Lucas veut qu'il y ait le moins possible de pyramides à construire avec les verres qui restent ?**

**Expliquez comment vous avez obtenu vos réponses.**

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Décomposer un nombre en une somme de nombres triangulaires selon des règles données

Trouver la différence entre un entier naturel (423) et le plus grand multiple de la somme des 8 premiers entiers qu'il contient. Décomposer ensuite cette différence en la somme du plus petit nombre possible de termes de type  $S_n$  avec  $n < 8$ .

#### Analyse de la tâche

- Comprendre la règle de construction des pyramides de verres.
- Comprendre que le premier étage d'une pyramide à 8 étages est constitué d'exactly 8 verres, le deuxième de 7 verres et ainsi de suite.
- Comprendre que le nombre total de verres dans une pyramide à 8 étages est la somme des 8 premiers entiers naturels :  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$ .

Ou bien,

- Dessiner ou construire une pyramide de verres à 8 étages et compter tous les verres (36).
- Pour savoir combien de pyramides à 8 étages vous pouvez construire avec 423 verres, procédez de plusieurs façons :
  - a) partir de 423 et soustraire plusieurs fois le nombre 36, en pointant le nombre de pyramides ainsi construites :  $(423 - 36 = 387$  (une pyramide) ;  $387 - 36 = 351$  (deux pyramides) ;  $351 - 36 = 315$  (trois pyramides)) ... et continuer jusqu'à ce qu'il reste 27 verres.
  - b) soit additionner plusieurs fois 36 et se rendre compte qu'après avoir additionné 12 fois 36 on a obtenu un nombre supérieur à 423 soit 432 et qu'il faut donc s'arrêter à 396 (onze pyramides). Le reste est  $423 - 396 = 27$  (cette stratégie peut aussi s'effectuer par multiplication).
  - c) soit procéder en divisant 423 par 36 et trouver 11 avec un reste de 27. On peut donc construire 11 pyramides de 8 étages, chacune de 36 verres. On a donc utilisé 396 verres ( $36 \times 11 = 396$ ).

- Avec les 27 verres restants ( $423 - 96 = 27$ ), il y a six possibilités. On peut construire:
  - une pyramide à 6 étages (21 verres) et une pyramide à 3 étages (6 verres),
  - ou une pyramide à 6 étages (21 verres) et deux pyramides à 2 étages ( $2 \times 3 = 6$  verres),
  - ou une pyramide à 5 étages (15) et deux pyramides à 3 étages ( $2 \times 6 = 12$  verres),
  - ou une pyramide à 5 étages (15) et quatre pyramides à 2 étages ( $4 \times 3 = 12$  verres),
  - ou quatre pyramides à 3 étages ( $4 \times 6 = 24$  verres) et une pyramide à 2 étages (3 verres),
  - ou neuf pyramides à 2 étages ( $9 \times 3 = 27$  verres).
- Conclure qu'il y a 11 pyramides de 8 étages et qu'avec les verres restants, Luca construit une pyramide de 6 étages et une de 3 étages, qui est la seule possibilité respectant la contrainte « le moins possible de ».
- On peut également procéder à l'aide d'un tableau, par exemple en observant que le nombre 27 est la somme des deux nombres triangulaires 6 et 21.
- d) Procéder à l'aide d'un tableau, par exemple :

Nombre d'étages	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre total de verres utilisés	1	3	6	10	15	21	28	36

#### Attribution des points

- 4 Réponse correcte et complète (11 pyramides de 8 étages, une de 6 étages et une de 3 étages - ou réponse tenant compte du nombre de verres : 11 de 36 verres chacune, une de 21 verres et une de 6 verres) avec une explication complète et/ou un comptage.
- 3 Réponse correcte et complète avec une description partielle ou peu claire de la procédure utilisée.
- 2 Réponse correcte sans calculs ni même explications, ou réponse incorrecte due à une erreur de calcul ou de comptage, mais avec une procédure correcte.
- 1 Réponse à onze pyramides à huit étages avec calculs et/ou explications, ou toutes les possibilités (à partir de pyramides à deux étages) correctes.
- 0 Incompréhension du problème ou bien seulement le calcul du nombre de verres d'une pyramide à 8 étages.

**Niveaux :** 6, 7, 8

**Origine :** Puglia

**13. UN LIVRE PASSIONNANT** (Cat. 6, 7, 8)

Mathias a reçu en cadeau de la part de ses grands-parents un livre d'aventures.

Il remarque que son livre comporte 114 pages.

Lundi il commence la lecture de quelques pages et se passionne pour l'histoire racontée.

Mardi, il lit le triple du nombre de pages lues le lundi.

Mercredi, il lit le double du nombre de pages lues mardi.

Jeudi, il lit la moitié du nombre de pages lues la veille.

Vendredi il termine son livre en lisant le même nombre de pages que mercredi.

**Combien de pages Mathias a-t-il lues lundi ?**

**Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.**

**ANALYSE A PRIORI****Tâche mathématique**

Trouver un nombre entier tel que, ajouté au double de son triple et au double du double de son triple, le résultat soit 114.

**Analyse de la tâche**

- Comprendre que le livre est composé de 114 pages et que Mathias le lit en entier en cinq jours.
- Procéder par essais organisés (ou non organisés) en attribuant un nombre hypothétique aux pages lues le lundi, en le modifiant progressivement jusqu'à obtenir comme somme des pages lues en cinq jours le nombre 114.

Par exemple, si on fait l'hypothèse que lundi Mathias a lu 10 pages, mardi il en aura lu 30 ( $3 \times 10$ ), mercredi 60 ( $2 \times 3 \times 10$ ), jeudi 30 ( $60 \div 2$ ) et vendredi encore 60. Additionner les pages lues :  $10 + 30 + 60 + 30 + 60 = 190$  et se rendre compte que la somme trouvée est plus grande que le nombre de pages du livre (114). Poursuivre alors avec un nouvel essai en diminuant encore le nombre de pages lues le lundi ; essayer par exemple avec 6 et se rendre compte que la nouvelle somme  $6 + 18 + 36 + 18 + 36 = 114$  est égale au nombre de pages du livre.

Ou bien

- Se rendre compte que le nombre de pages lues le lundi ( $n$ ) se répète multiplicativement plusieurs fois dans les quantités de pages lues les jours suivants : lundi  $n$  pages, mardi  $3n$  pages, mercredi  $2 \times 3n$  pages, jeudi  $(2 \times 3n) \div 2$  pages, vendredi  $2 \times 3n$  pages.

Se rendre compte que le nombre de pages lues le lundi se répète en tout dix-neuf fois.

Calculer le nombre de pages lues le lundi  $114 \div 19 = 6$ .

Ou bien avec une procédure algébrique :

- Représenter graphiquement par un point, un segment ou tout autre symbole le nombre de pages lues le lundi ; répéter le symbole trois fois pour le mardi, six fois pour le mercredi, trois fois pour le jeudi et à nouveau six fois pour le vendredi. Se rendre alors compte que le symbole répété 19 fois représente le total des pages du livre, c'est-à-dire le nombre 114 et calculer alors la valeur du symbole :  $114 \div 19 = 6$ .
- Conclure que le nombre de pages lues le lundi est 6.

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (6 pages) avec des explications claires et complètes de la procédure suivie et détaillée des calculs.
- 3 Réponse correcte avec des explications partielles ou peu claires ou avec seulement une vérification.
- 2 Réponse correcte sans explications ou réponse fautive à cause d'une erreur de calcul, mais procédure bien expliquée.
- 1 Début de raisonnement correct (par exemple seulement une représentation graphique ou bien quelques essais cohérents).
- 0 Incompréhension du problème.

**Niveaux :** 6, 7, 8

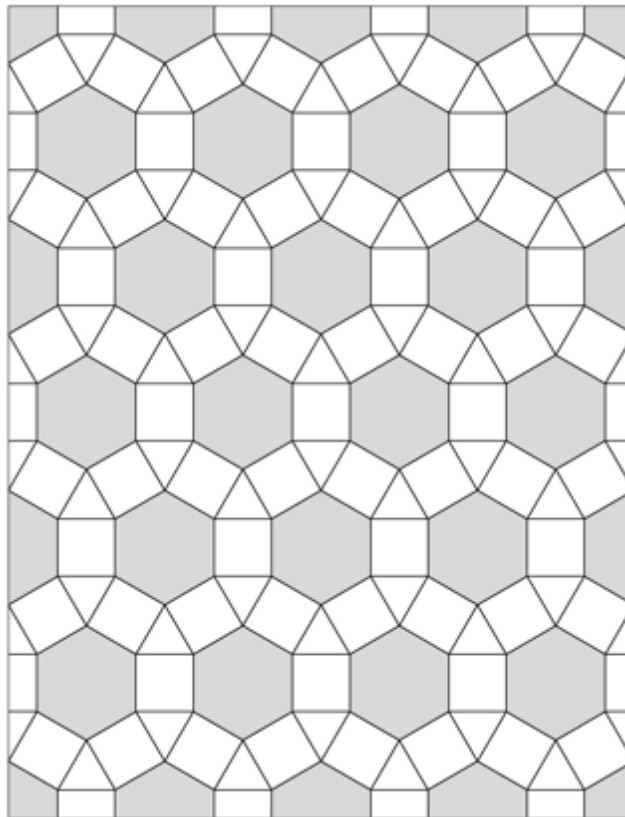
**Origine :** Parma

#### 14. UN BEAU COLLAGE (Cat. 7, 8)

Sylvia a acheté une boîte contenant des autocollants en forme de triangles équilatéraux, de carrés et d'hexagones réguliers qui permettent de former de beaux collages.

En utilisant toutes les pièces de sa boîte, Sylvia a réalisé le collage rectangulaire ci-dessous où les hexagones, entourés chacun de carrés et de triangles équilatéraux, forment des motifs qui se répètent très régulièrement.

Évidemment, elle a dû découper des autocollants pour former le contour du collage rectangulaire. Une fois le collage terminé, il ne lui reste plus aucun autocollant, ni morceau d'autocollant.



Son amie Brunella a acheté une boîte plus grande, qui contient 216 hexagones réguliers, ainsi que des carrés et des triangles équilatéraux.

Brunella a également utilisé tous les autocollants de sa boîte, pour former un collage rectangulaire dont le motif est identique à celui de Sylvia, et se répète régulièrement. Elle a également dû découper les autocollants du contour de la figure avant de les coller.

**Combien y a-t-il de carrés et combien y a-t-il de triangles équilatéraux dans la boîte de Brunella ?**

**Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse et donnez les détails de vos calculs.**

---

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Recherche d'une forme possible de *collage composite* à partir d'un pavage donné (avec des triangles équilatéraux, des carrés et des

hexagones réguliers) ou comptage et utilisation de la proportionnalité.

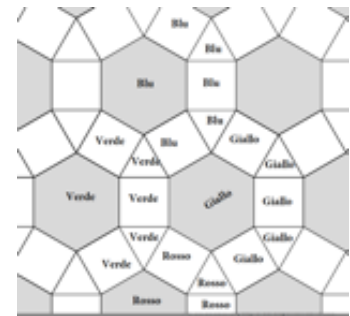
**Analyse de la tâche**

- Dans la phase d'appropriation du problème, analyser le modèle pour remarquer que :
  - les polygones sont collés de façon régulière, sans se chevaucher, ni laisser de trou pour constituer un même motif plusieurs fois répété.
  - les bords du rectangle sont constitués par des moitiés de polygones (carrés, triangles et hexagones) et à chacun des 4 sommets, Sylvia a collé un quart d'hexagone
  - chaque côté d'un polygone est en contact avec un seul côté d'un autre polygone.
  - un certain nombre de carrés et de triangles équilatéraux appartiennent à plusieurs motifs ayant un hexagone au centre.
- Procéder au comptage de chaque type de polygones à partir de la figure donnée et en s'appuyant sur la figure donnée par l'énoncé dont les côtés sont des axes de symétrie, ce comptage peut être fait en tenant compte : demi-autocollants carrés. Le comptage conduit à 24 hexagones (18 entiers et 12 moitiés) ; 72 carrés (65 entiers et 14 moitiés) ; 48 triangles (42 entiers et 12 moitiés).

(On peut aussi imaginer des élèves essayant de construire le rectangle de Brunella en assemblant 9 rectangles comme celui de Silvia).

- Enfin, comprendre que les nombres d'hexagones, de carrés et de triangles dans les deux collages sont proportionnels et qu'il faut donc trouver le rapport entre le nombre d'hexagones dont Brunella a besoin (216) et le nombre d'hexagones dans la figure donnée, soit  $216 : 24 = 9$ , multiplier ce rapport par le nombre de carrés puis par le nombre de triangles :  $72 \times 9 = 648$  et  $48 \times 9 = 432$ .

- Procéder à partir du dessin du collage et comprendre qu'il est nécessaire de trouver combien de carrés et combien de triangles équilatéraux appartiennent à deux « motifs » et combien à trois « motifs ». Chaque motif a 1 hexagone, 6 carrés et 6 triangles.
- Se rendre compte que 1 carré est commun à 2 motifs, donc que le nombre 6 des carrés par motif doit être divisé par 2, et qu'un triangle est commun à 3 motifs, donc que le nombre 6 des triangles doit être divisé par 3.



Ou bien,

- Procéder avec des découpages pour trouver combien de carrés et combien de triangles équilatéraux appartiennent à deux « motifs » et combien à trois « motifs », par exemple pour arriver à des configurations de ce type :



Ou bien,

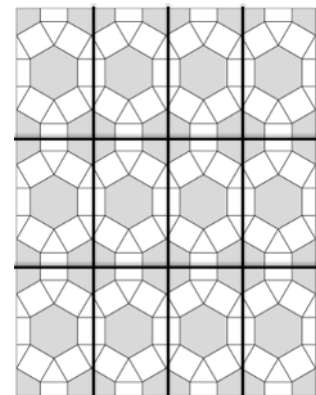
- Partager le modèle en 12 petits *modules* comme dans la figure pour obtenir le nombre total de chaque polygone présent dans le modèle.

Dans chacun des 12 modules, il y a 2 hexagones (1 entier et 1 recomposé), 6 carrés (4 entiers et 2 recomposés), 4 triangles (2 entiers et 2 recomposés).

Pour "paver" la surface du modèle, il faut :

- $2 \times 12 = 24$  hexagones réguliers
- $6 \times 12 = 72$  carrés
- $4 \times 12 = 48$  triangles équilatéraux

Ou toute autre méthode utilisant des découpages symétriques



**Attribution des points**

- 4 Les deux réponses correctes (648 carrés et 432 triangles) avec une description claire de la démarche et le détail des calculs.
- 3 Les deux réponses correctes avec une description peu claire ou incomplète de la procédure mais avec le détail des calculs ou une description claire de la procédure sans le détail des calculs.

- 2 Les deux réponses correctes sans description de la procédure et sans détail des calculs, ou une réponse incorrecte due à une erreur de comptage ou de calcul (avec une description claire de la procédure).
- 1 Une réponse correcte sans explication, ou un début de raisonnement correct (par exemple, comptage correct des autocollants dans le collage de Silvia ou dans l'un des motifs).
- 0 Incompréhension du problème.

**Niveaux :** 7, 8

**Origine :** Groupe Géométrie plane

**15. INVITATION À LA FÊTE** (Cat. 7, 8, 9)

Aude, Blanche et Christine se sont retrouvées hier pour préparer les 60 cartons d'invitation pour leur fête. Cela leur a pris 3 heures.

Aude déclare : « À mon rythme, si j'avais préparé seule les 60 cartons, cela m'aurait pris 10 heures ! »

Blanche : « Moi encore plus, ça m'aurait pris 15 heures seule. »

**Combien d'heures Christine devrait-elle travailler si elle devait tout faire seule ?**

**Expliquez comment vous avez fait pour trouver la réponse.**

---

**ANALYSE A PRIORI****Tâche mathématique**

Calculer le temps nécessaire à une personne pour réaliser un travail, en connaissant le temps nécessaire à deux autres personnes et au groupe de trois pour réaliser le même travail.

**Analyse de la tâche**

- Se rendre compte qu'il est nécessaire de calculer la vitesse de préparation des invitations.
- Les trois amies préparent ensemble 60 cartons en 3 heures, soit toutes les heures  $60 \div 3 = 20$  cartons.
- Aude devrait travailler 10 heures pour préparer les 60 cartons, donc chaque heure elle est capable de préparer  $60 \div 10 = 6$  cartons
- Blanche devrait travailler 15 heures pour préparer les 60 cartons, donc chaque heure elle est capable d'en préparer  $60 \div 15 = 4$  cartons.
- Puisque les trois amies préparent ensemble 20 cartons par heure, parmi ceux-ci 6 sont préparés par Aude et 4 sont préparés par Blanche. Christine prépare donc  $20 - 4 - 6 = 10$  cartons par heure.
- Christine est capable de préparer 10 cartons par heure, donc pour en réaliser 60, il lui faudrait  $60 \div 10 = 6$  heures.
- Si Christine devait préparer elle-même les cartons, elle devrait travailler 6 heures.

Ou bien,

- Après avoir calculé les vitesses horaires d'Aude et de Blanche, calculer combien de cartons Aude et Blanche préparent en 3 heures : Aude en prépare 18 ( $3 \times 6$ ) et Blanche en prépare 12 ( $3 \times 4$ ), au total elles en préparent 30 ( $18 + 12$ ), donc les 30 autres ( $60 - 30$ ) sont ceux que Christine prépare. Donc Christine prépare 10 ( $30 \div 3$ ) cartons en une heure. On en conclut que si elle avait dû préparer elle-même les 60 cartons, cela lui aurait pris 6 heures ( $60 \div 10$ ).

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (6 heures) avec explications claires et complètes.
- 3 Réponse correcte avec explications partielles ou peu claires  
ou seulement le calcul des vitesses horaires de la préparation des cartons du groupe, d'Alba, de Bianca et de Chiara.
- 2 Bonne réponse sans explication ni justification,  
ou réponse incorrecte en raison d'une erreur de calcul,  
ou solution incomplète, mais calcul de la vitesse horaire de préparation des cartons du groupe, d'Aude et de Blanche.
- 1 Début d'une recherche cohérente.
- 0 Incompréhension du problème.

**Niveaux :** 7, 8, 9

**Origine :** Belluno

## 16. LE GRATTE-CIEL (Cat. 7, 8, 9, 10)

Carla veut rendre visite à son amie Rita, passionnée d'énigmes mathématiques, qui vit dans un gratte-ciel.

Carla demande à son amie quel est l'étage de son appartement, Rita lui envoie l'image suivante :

	170	171		
			128	129

et ajoute : « J'ai réalisé un tableau où j'ai noté tous les numéros d'appartements numérotés de gauche à droite et où chaque ligne représente un étage.

Je t'ai envoyé une partie de ce tableau dans lequel j'ai enlevé la plupart des numéros.

Tu dois aussi savoir que le gratte-ciel n'a pas d'appartements au rez-de-chaussée et qu'il y a le même nombre d'appartements à chaque étage. Mon appartement est au numéro 158. Je t'attends ».

### À quel étage se trouve l'appartement de Rita ?

#### Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

##### ANALYSE A PRIORI

##### Tâche mathématique

Compléter un tableau de nombres en connaissant la position de quatre d'entre eux.

##### Analyse de la tâche

- Chercher à comprendre la régularité dans l'écriture des nombres sur le tableau en fonction du nombre de lignes et de colonnes.
- Compléter les lignes dans lesquelles sont écrits les quatre nombres pour obtenir deux nombres dans la même colonne.
- Calculer la différence entre deux nombres de la même colonne :  $44 = 170 - 126$  (ou  $173 - 129$  ou ...) et comprendre que cela correspond au nombre d'appartements répartis sur quatre étages.
- En déduire qu'il s'agit d'un tableau avec 11 nombres dans chaque ligne et que le gratte-ciel a 11 appartements par étage.
- Conclure que l'appartement 158 se trouve au 15<sup>e</sup> étage, en fait  $158 \div 11 = 14$  avec un reste de 4.

Ou bien,

- Procéder de manière plus ou moins organisée sur le nombre d'appartements à chaque étage afin de respecter les positions des chiffres dans le tableau dessiné dans le texte.

##### Attribution des points

- 4 Réponse correcte (15<sup>e</sup> étage) avec explication de la procédure où la régularité obtenue à partir des chiffres du tableau ou les essais effectués montrent clairement comment on est arrivé à la solution.
- 3 Réponse correcte, mais la procédure n'est pas clairement indiquée.
- 2 Réponse correcte sans explication,  
ou réponse incorrecte due à une erreur de calcul, mais régularité comprise,  
ou réponse 14<sup>e</sup> étage car les élèves n'ont pas tenu compte du reste de la division.
- 1 Début de raisonnement correct avec au moins quelques numéros inscrits dans le tableau.
- 0 Incompréhension du problème.

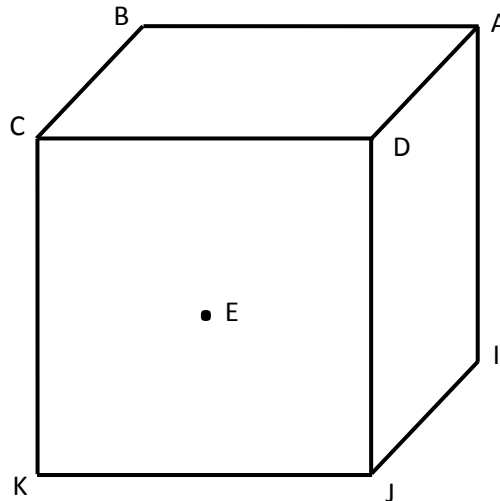
**Niveaux :** 7, 8, 9, 10

**Origine :** GTNU (groupe de travail numération, à partir du problème *Fouilles archéologiques* 15.F.11)

**17. LE PETIT ESCARGOT PARESSEUX** (Cat. 8, 9, 10)

Un petit escargot se trouve au sommet A d'un cube en pierre et veut atteindre le point E qui est le centre de la face CDJK. La longueur du côté du cube est égale à 48 cm. Pour aller de A à E, l'escargot décide de passer par l'arête [CD].

Comme le petit escargot est très paresseux, il veut emprunter le chemin le plus court possible.



**Pour que son chemin soit le plus court possible, par quel point de l'arête [CD] doit-il passer ?**

**Expliquez comment vous avez fait pour trouver votre réponse.**

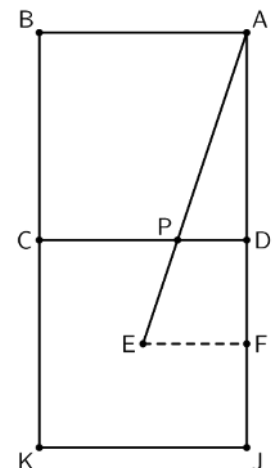
**ANALYSE A PRIORI**

**Tâche mathématique**

Établir la position d'un point sur une arête d'un cube de telle sorte qu'un chemin allant d'un sommet au milieu d'une face opposée et passant par ce point ait une longueur minimale.

**Analyse de la tâche**

- Observer la figure et constater qu'il s'agit de la reproduction d'un cube en perspective : le point A sur la face arrière et le point E au milieu de la face avant.
- Comprendre qu'il faut déterminer la longueur minimale d'un chemin composé de deux segments appartenant respectivement à la face supérieure et à la face avant du cube et passant par A, un point P de l'arête [CD], et le point E milieu de la face avant.
- Comprendre qu'il peut être avantageux de considérer le développement sur un plan des deux faces adjacentes sur lesquelles le chemin le plus court est le chemin APE, A, P, E étant alignés :
- Il faut donc trouver la longueur PD.
- Comparer les triangles ADP et AFE. Comme AD est le double de DF, constater qu'ils sont semblables dans un rapport de similitude de 2/3.
- Conclure que  $DP = \frac{2}{3} FE = \frac{1}{3} DC$ .
- En déduire que  $DP = \frac{1}{3} \times 48$ . Donc  $DP = 16$  cm ; l'escargot doit passer à 16 cm de D, sur l'arête [CD]



**Attribution des points**

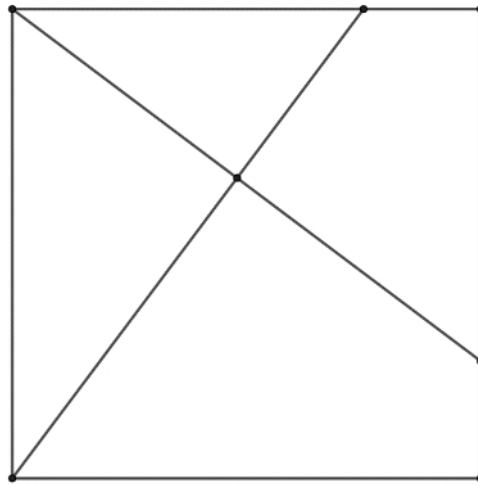
- 4 Bonne réponse (16 cm du point D ou réponse équivalente, par exemple 32 cm du point C) avec explication complète du raisonnement suivi avec un dessin précis.
- 3 Réponse correcte avec explication incomplète ou peu claire du raisonnement suivi ou réponse approximative (valeur comprise entre 15,5 cm et 16,5 cm) avec description claire de la procédure.
- 2 Réponse correcte (16 cm ou valeur comprise entre 15,5 cm et 16,5 cm) sans explication, ou raisonnement correct (par exemple mesures prises sur un modèle de cube), mais avec une erreur dans le calcul du rapport de similitude.
- 1 Début d'un raisonnement correct, par exemple quelques tentatives de mesure ou développement des deux faces sur un plan.
- 0 Incompréhension du problème ou réponse déduite de mesures effectuées sur le dessin de l'énoncé.

**Niveaux :** 8, 9, 10

**Origine :** Parma

### 18. LE CARRÉ DE PAUL (Cat. 9, 10)

Paul a divisé un carré de 20 cm de côté en quatre parties, en traçant deux segments perpendiculaires comme le montre la figure ci-dessous.



Chaque segment a une extrémité sur l'un des sommets du carré et l'autre divise le côté opposé en deux parties, l'une triple de l'autre.

Paul n'a pas d'instruments de mesure (règle, papier millimétré ou autre), mais il prétend pouvoir calculer l'aire des quatre parties en lesquelles le carré a été divisé.

**Quelles sont les aires des quatre parties ?**

**Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.**

#### ANALYSE A PRIORI

##### Tâche mathématique

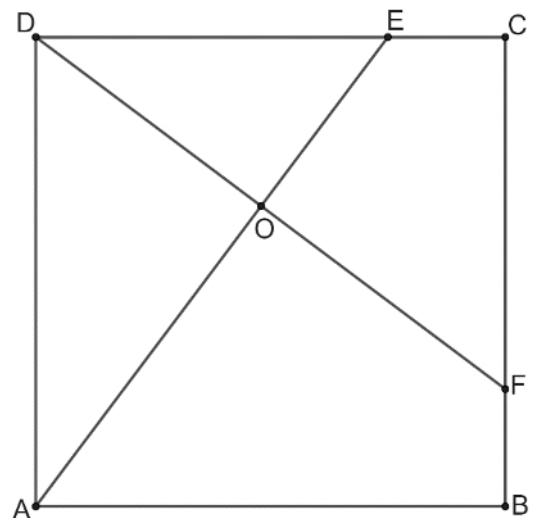
À partir d'un carré de côté donné, divisé par quatre segments perpendiculaires en quatre triangles, calculer l'aire de chacune des parties.

##### Analyse de la tâche

- Comprendre la construction de la figure à partir des données et en particulier le partage des côtés du carré en segments de 5 cm et 15 cm.
- Reconnaître les différentes figures qui apparaissent : les deux grands triangles rectangles, ADE et DCF égaux par construction, de côtés 20 cm et 15 cm et les triangles DOE et AOD.
- Calculer la longueur de l'hypoténuse des grands triangles à l'aide du théorème de Pythagore  $15^2 + 20^2 = 625$  et  $\sqrt{625} = 25$  (en cm).

Remarquer la similitude des triangles DAE et DAO (qui ont des angles égaux chacun à chacun).

- Appliquer l'égalité des rapports de similitude :  $AO/AD = AD/AE = 20/25 = 4/5$  et  $DO/DA = DE/AE = 15/25 = 3/5$ .
- D'où les mesures des côtés (en cm) :  $AO = 20 \times 4/5 = 16$  et  $DO = 20 \times 3/5 = 12$ . De plus,  $OE = 25 - 16 = 9$ .



Ou bien,

- Calculer les longueurs AO, DO, OE avec le théorème de Pythagore et/ou d'Euclide, par exemple :
- Calculer la longueur de la hauteur du triangle DAE relative à la base AE :  $DO = \frac{20 \times 15}{25} = 12$  (en cm).
- Appliquer le théorème de Pythagore pour trouver la longueur du côté OE :  $OE = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{81} = 9$  (en cm) et du côté AO :  $AO = \sqrt{20^2 - 12^2} = \sqrt{256} = 16$  (en cm).
- En déduire les aires demandées (en cm<sup>2</sup>) : aire (DAO) =  $16 \times 12 / 2 = 96$  ; aire (DOE) =  $12 \times (25 - 16) / 2 = 54$  ;  
aire (EOFC) = aire (DCF) – aire (DOE) =  $20 \times 15 / 2 - 54 = 96$   
et aire (AOFB) = aire (ABCD) – aire (DAO) – aire (DOE) – aire (EOFC) =  $400 - 96 - 54 - 96 = 154$ .

**Attribution des points**

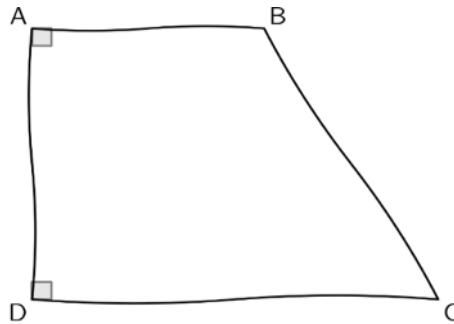
- 4 Réponses correctes (54 cm<sup>2</sup>, 96 cm<sup>2</sup>, 96 cm<sup>2</sup>, 154 cm<sup>2</sup>) avec la description de la procédure suivie.
- 3 Réponses correctes avec des explications peu claires,
- 2 Réponses correctes sans explications;
- 1 début de raisonnement cohérent.
- 0 Incompréhension du problème.

**Niveaux :** 9, 10

**Origine :** Le carré de Joseph (RMT. 19.F.16 ; cat. 7-10). Il quadrato di Giuseppe (ral. 19.F.16 ; cat. 7-10)

**19. LE TRAPÈZE DE M. TOURNESOL** (Cat. 9, 10)

Le professeur Tournesol fait travailler ses deux petits-enfants en géométrie. Il a coupé un trapèze rectangle suivant la plus petite des diagonales en deux triangles dont un seul est rectangle et donné un triangle à Morgane et l'autre à Valentin.



Il leur demande ensuite de lui donner trois caractéristiques du triangle qu'ils ont reçu.

Morgane dit :

1. mon triangle est rectangle ;
2. le plus petit côté mesure 9 cm ;
3. le plus grand des côtés mesure 18 cm.

Valentin dit :

1. mon triangle a au moins un axe de symétrie ;
2. un côté mesure 17 cm ;
3. le côté qui correspond à la grande base du trapèze mesure 18 cm.

M. Tournesol dit à Morgane que toutes ses affirmations sont correctes, et à Valentin qu'une de ses affirmations est fausse.

**Quelle est cette affirmation ?**

**Expliquez pourquoi cette affirmation est fausse.**

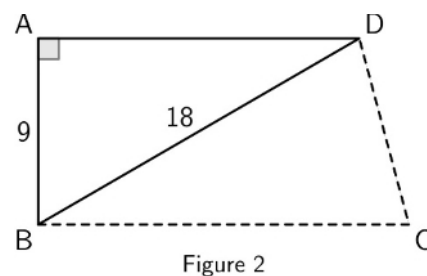
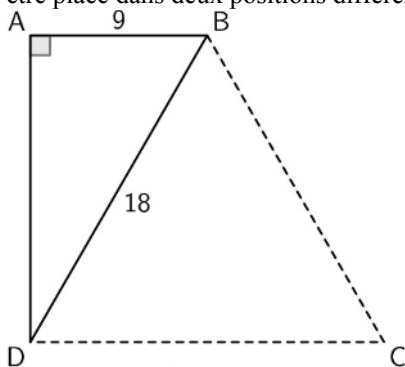
**ANALYSE A PRIORI**

**Tâche mathématique**

Représenter une figure géométrique donnée, l'analyser, reconnaître une affirmation incorrecte et le justifier avec les propriétés géométriques.

**Analyse de la tâche**

- Représenter un trapèze rectangle, coupé par la petite diagonale, en partant des informations correctes de Morgane ; le triangle peut être placé dans deux positions différentes :



- Constaté que la réponse 1 de Valentin ne peut pas être fausse sinon elle entraînerait automatiquement que la réponse 3 serait fausse (il y a déjà un côté qui mesure 18 cm d'après l'affirmation 3 de Morgane). En déduire que le triangle BDC de Valentin est isocèle.
- Observer que le triangle de Morgane est la moitié d'un triangle équilatéral et a donc un angle de  $30^\circ$  (au sommet D) et un angle de  $60^\circ$  (au sommet B).
- Dans le premier cas (figure 1) en déduire que l'angle BDC mesure  $60^\circ$  (complémentaire de  $30^\circ$ ).
- Le triangle BDC est donc isocèle avec un angle de  $60^\circ$  ; on en déduit que c'est un triangle équilatéral. Puisqu'un côté mesure 18 cm, les deux autres mesureront également 18 cm, l'information fautive de Valentin est donc la n°2.
- Dans le deuxième cas (figure 2), puisque le triangle BCD est isocèle, il a deux côtés mesurant 18 cm.
- La première possibilité a lieu si la grande base [BC] mesure 18 cm (et [DC] mesure environ 9,3 cm). La seconde possibilité ne peut pas se produire car la grande diagonale [BD] mesure 18 cm. L'affirmation 2 de Valentin est donc fautive.

**Attribution des points**

- 4 Bonne réponse (affirmation 2) et explications complètes qui examine les deux cas.
- 3 Bonne réponse et explications incomplètes ou peu claires, les deux cas étant examinés.
- 2 Bonne réponse sans explication, mais avec au moins un dessin d'un des deux cas.
- 1 Début de raisonnement correct (par exemple, reconnaître l'angle de  $60^\circ$  ou faire des déductions cohérentes).
- 0 Incompréhension du problème.

**Niveaux :** 9, 10

**Origine :** Suisse Romande

**20. LA GRANDE VOILE (Cat. 9, 10)**

Justine et Amir préparent une course transatlantique à la voile. Pour leur bateau, on leur propose un projet de grande voile, représenté ci-contre.

Cette grande voile serait constituée de deux triangles : le triangle BRV isocèle en R, et le triangle ABV isocèle en B. Ces triangles seront fixés sur le mât le long de la droite (AR).

Justine et Amir demandent de modifier le projet pour que la grande voile soit également un triangle isocèle.

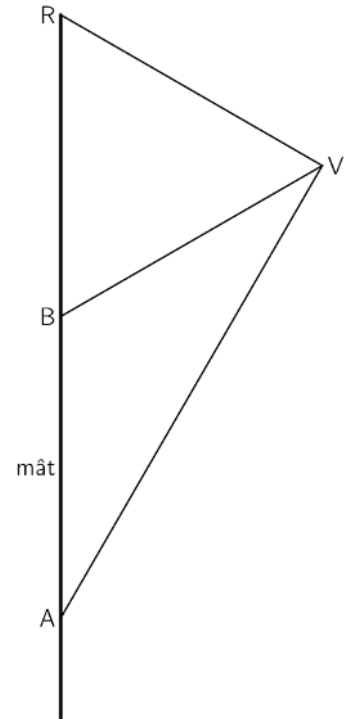
Justine suggère de le rendre isocèle en V.

Amir dit : « Je pense que la grande voile pourrait aussi être isocèle en A ou en R ».

**Est-il possible de réaliser les trois projets proposés par Justine et Amir ?**

**Pour chaque projet réalisable, quelles sont les mesures des angles ?**

**Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.**



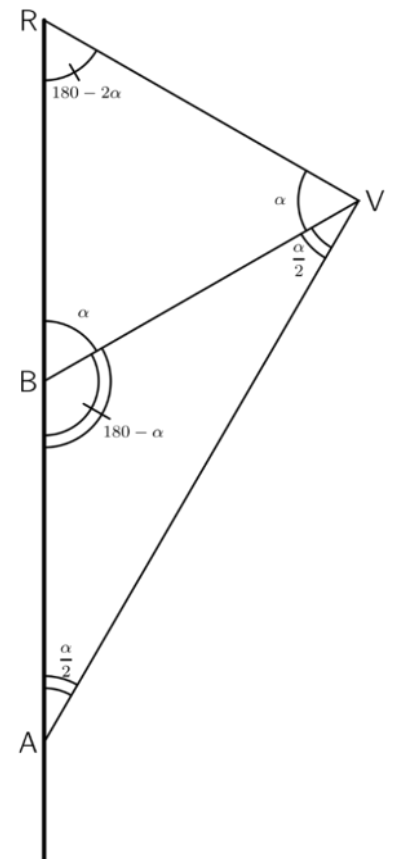
**ANALYSE A PRIORI**

**Tâche mathématique**

Déterminer si un triangle, formé de deux triangles isocèles ayant un sommet commun et un côté dans le prolongement l'un de l'autre peut lui-même être isocèle et si oui, déterminer les mesures des angles.

**Analyse de la tâche**

- Comprendre la situation :
  - Un triangle RVA est divisé en deux triangles isocèles dont la base (le côté non égal aux deux autres) de l'un coïncide avec l'un des deux côtés égaux de l'autre.
  - On veut faire en sorte que le triangle RVA soit également isocèle.
- Les mesures des côtés n'étant pas connues, il faut travailler sur les mesures des angles des triangles.
- Sachant que la somme des angles d'un triangle vaut  $180^\circ$ , en désignant par exemple par  $\alpha$  l'un des angles de base du triangle RBV, obtenir les valeurs des autres angles de la figure en fonction de  $\alpha$  : l'angle au sommet du triangle BRV mesure  $180^\circ - 2\alpha$  ; l'angle au sommet du triangle ABV mesure  $180^\circ - \alpha$  et, par conséquent, la somme des deux angles égaux du triangle BVA est égale à  $\alpha$ , donc chacun d'eux mesure  $\alpha/2$ .
- Si on veut suivre la demande de Justine, c'est-à-dire que le triangle RVA soit isocèle en V, les angles  $\widehat{VRA}$  et  $\widehat{VAR}$  doivent être égaux. On en déduit alors l'équation  $180^\circ - 2\alpha = \alpha/2$  qui a pour solution  $\alpha = 72^\circ$ .
- Pour faire en sorte que la grande voile soit isocèle en A, comme le propose Amir, les angles  $\widehat{ARV}$  et  $\widehat{AVR}$  doivent être égaux, donc  $\alpha$  doit vérifier l'équation  $180^\circ - 2\alpha = \alpha + \alpha/2 = 3\alpha/2$ , d'où  $\alpha = 360 / 7$  (environ  $51,5^\circ$ ).
- Il est évident cependant que la voile ne peut pas être isocèle en R puisque  $3\alpha/2 \neq \alpha/2$  quelle que soit la valeur de  $\alpha \neq 0$ .
- Conclure que la grande voile peut être un triangle isocèle en V, l'angle en V mesurant  $3\alpha/2 = 108^\circ$  et des angles à la base mesurant  $36^\circ$ , ou isocèle en A, l'angle en A mesurant  $\alpha/2 = 180^\circ / 7$  (environ  $25,7^\circ$ ) et les angles à la base mesurant  $540^\circ / 7$  (environ  $77,1^\circ$ ).



**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (seuls deux projets peuvent être réalisés : triangle isocèle en V avec des angles qui mesurent  $108^\circ$  et  $36^\circ$  à la base et triangle isocèle en A avec des angles qui mesurent  $180^\circ / 7$  et  $540^\circ / 7$ , ou des valeurs approchées, à la base) avec une explication complète de la procédure qui mène à la réponse et la justification qu'il n'est pas possible d'avoir un triangle isocèle en R et le calcul des angles.
- 3 Réponse correcte avec explication incomplète ou peu claire ou non justification qu'il n'est pas possible d'avoir un triangle isocèle en R, mais calcul correct des mesures des angles.
- 2 Réponse correcte à la première question avec des explications claires, mais les mesures d'angles sont incorrectes en raison d'erreurs de calcul  
Ou un seul triangle isocèle identifié sans rien dire des autres possibilités avec calculs corrects des angles le concernant  
Ou réponse correcte à la première question, mais sans le calcul de la mesure des angles.
- 1 Début de recherche cohérente.
- 0 Incompréhension du problème.

**Niveaux :** 9, 10

**Origine :** Suisse Romande

**21. LA RÉCOLTE DES NOIX II** (Cat. 9, 10)

C'est la fin de l'été et Anna constate que les noix commencent à tomber.

Elle décide alors d'aller, chaque soir, récolter toutes les noix tombées dans la journée.

Le deuxième jour, elle ramasse 12 noix de plus que le premier jour.

Le troisième jour, des amis d'Anna viennent l'aider et ils récoltent ensemble un nombre de noix égal au produit des noix récoltées par Anna le premier et le deuxième jour.

Au final, on compte le nombre total de noix récoltées au cours des trois jours : il y en a 447.

**Combien de noix Anna a-t-elle récoltées le deuxième jour ?**

**Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.**

---

**ANALYSE A PRIORI****Tâche mathématique**

Déterminer trois nombres entiers dont la somme est 447, tels que le deuxième dépasse le premier de 12 et que le troisième soit le produit des deux premiers.

**Analyse de la tâche**

- Comprendre que les deux relations imposées font référence aux noix récoltées le premier jour ; par conséquent, si on connaît le nombre de noix récoltées le premier jour, on peut déterminer le nombre de noix récoltées les deux jours suivants.
- Procéder ensuite par essais et erreurs : par exemple si Anna récoltait 10 noix le premier jour, le deuxième elle en récolterait 22 et le troisième, avec ses amis, 220. Mais  $10 + 22 + 220 = 252$  ce qui est trop peu. Si elle en récoltait 20 le premier jour, la somme serait de 640, donc supérieure aux noix récoltées en tout. Il faut donc essayer avec des nombres compris entre 10 et 20 jusqu'à conclure que le premier jour Anna a récolté 15 noix, le deuxième 27 et le troisième jour 405.

Ou par l'algèbre :

- Appeler  $n$  le nombre de noix récoltées le premier jour,  $n + 12$  est le nombre de noix récoltées le deuxième jour,  $n(n + 12)$  le nombre de noix récoltées le troisième jour. Écrire l'équation  $n + n + 12 + n(n + 12) = 447$ . C'est une équation du second degré qui a les deux solutions  $n = -29$  (non acceptable) et  $n = 15$  (acceptable). Conclure qu'Anna a récolté 15 noix le premier jour et 27 le deuxième jour.

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (27 noix) avec explication claire de la procédure suivie (par essais et erreurs montrant au moins deux tentatives en plus de la bonne, ou procédure algébrique avec calculs pertinents).
- 3 Réponse correcte avec explication incomplète, tentatives non explicitées ou seulement une vérification.
- 2 Réponse correcte sans explication, ou réponse fautive due à une erreur de calcul dans la résolution de l'équation.
- 1 Début de raisonnement correct (par exemple, quelques essais).
- 0 Incompréhension du problème

**Niveaux :** 9, 10

**Origine :** Parma + Franche-Comté

**22. SAC DE BILLES** (Cat. 10)

Zoé a un sac de 24 billes. Chaque bille est soit rouge, soit bleue, soit jaune. En piochant dans le sac 20 billes au hasard elle obtient à chaque fois au moins 2 billes rouges, 6 billes bleues et 4 billes jaunes.

**Combien de billes de chaque couleur y a-t-il dans le sac ?**

**Expliquez comment vous avez fait pour trouver votre réponse.**

**ANALYSE A PRIORI****Tâche mathématique**

Calculer le cardinal de chacun des trois sous-ensembles d'une collection de cardinal connu.

**Analyse de la tâche****• Méthode n° 1**

- Comprendre que si sur 20 billes il y a toujours au moins 2 billes rouges, c'est que le nombre des billes bleues ou jaunes ne dépasse pas 18.
- Comprendre de même que le nombre des billes rouges ou jaunes ne dépasse pas 14 et que le nombre des billes rouges ou bleues ne dépasse pas 16.
- Procéder par essais-ajustements :
  - Supposer que le nombre de billes bleues ou jaunes est strictement inférieur à 18, c'est-à-dire inférieur ou égal à 17.
  - En déduire que le nombre obtenu en faisant la somme des nombres de billes bleues ou jaunes, rouges ou jaunes et rouges ou bleues est inférieur ou égal à 47.
  - Remarquer d'autre part qu'en ajoutant le nombre de billes bleues ou jaunes au nombre des rouges ou jaunes et au nombre des rouges ou bleues, on compte deux fois chaque couleur et on obtient donc  $2 \times 24 = 48$ .
  - En déduire que l'hypothèse « le nombre de billes bleues ou jaunes est strictement inférieur à 18 » est absurde et conclure que le nombre des billes bleues ou jaunes est exactement 18 ; en déduire qu'il y a exactement 6 billes rouges dans le sac.
  - Par un raisonnement identique, obtenir qu'il y a 14 billes rouges ou jaunes et en déduire qu'il y a 10 billes bleues dans le sac.
  - Et de même qu'il y a exactement 16 billes rouges ou bleues et donc 8 billes jaunes dans le sac.

**• Méthode n° 2**

- Comprendre que comme Zoé obtient au moins 2 billes rouges à chaque tirage de 20 billes, cela signifie que le nombre de billes bleues ou jaunes est inférieur ou égal à 18 et par conséquent qu'il y a au moins 6 billes rouges parmi les 24 billes du sac ; par un raisonnement analogue, comprendre que le nombre de billes bleues est au moins égal à 10 et le nombre de billes jaunes est au moins égal à 8.
- Supposer que le nombre de billes rouges est strictement supérieur à 6 (donc supérieur ou égal à 7) et en déduire que le nombre de billes rouges ou bleues ou jaunes est supérieur ou égal à  $7 + 10 + 8 = 25$ , ce qui est contradictoire avec le fait qu'il y a 24 billes dans le sac ; en déduire que le nombre de billes rouges est exactement égal à 6.
- Par un raisonnement analogue, comprendre qu'il y a 10 billes bleues dans le sac et en déduire qu'il en contient 8 jaunes ( $24 - (6 + 10) = 8$ ).

Ou bien,

- Par une procédure algébrique, si R désigne le nombre de boules rouges, B le nombre de boules bleues et J le nombre de boules jaunes :
  - La méthode n° 1 conduit au système d'inéquations :
 
$$\begin{aligned} B + J &\leq 18 \\ R + J &\leq 14 \\ R + B &\leq 16 \end{aligned}$$
  - En additionnant ces trois inégalités, on obtient  $2 \times (R + B + J) \leq 18 + 14 + 16 = 48$
  - Or, on sait d'autre part que  $2 \times (R + B + J) = 48$ . Donc aucune des trois inégalités du système ci-dessus ne peut être stricte. On a donc  $B + J \leq 18$ ,  $R + J = 14$ ,  $R + B = 16$ .

- On en déduit que R est égal à 6, B est égal à 10 et J est égal à 8.
  - o La méthode n° 2 donne le système d'inéquations :

$$R \geq 6$$

$$B \geq 10$$

$$J \geq 8$$

En additionnant ces trois inégalités, on obtient  $R + B + J \geq 6 + 10 + 8 = 24$ .

Or, on sait d'autre part que  $R + B + J = 24$  Donc aucune des inégalités du système ci-dessus ne peut être stricte. On obtient donc directement :  $R = 6$ ,  $B = 10$  et  $J = 8$ .

#### Attribution des points

- 4 Réponse correcte ( $R = 6$  ;  $J = 8$  ;  $B = 10$ ) avec des explications claires justifiant la réponse et son unicité.
- 3 Réponse correcte ( $R = 6$  ;  $J = 8$  ;  $B = 10$ ) avec des explications partielles ou peu claires, sans l'unicité.
- 2 Réponse correcte ( $R = 6$  ;  $J = 8$  ;  $B = 10$ ) sans explication.  
Ou recherche bien avancée dans une étude exhaustive des cas conduite méthodiquement sans réponse.
- 1 Début de recherche cohérente (par exemple : quelques essais avec vérification ne montrant pas la tentative d'étude exhaustive méthodique).
- 0 Incompréhension du problème.

**Niveau :** 10

**Origine :** Lyon