	Titre					*Catégories*				*Origine*	*Domaine*
1	Couleurs et neveux	3	4							RV	Combinatoire
2	Les triplés	3	4							23.I.04	Numération, chiffres pairs et impairs
3	En train	3	4							ARMT	Arithmétique, opérations élémentaires
4	La nouvelle valise	3	4	5						CA	Combinatoire
5	Châteaux de sable	3	4	5						GTCP	Arithmétique, substitution
6	Points cachés		4	5						03.II.06	Dénombrements sur quadrillage
7	Avec quatre triangles			5	6	7				BB	Géométrie, périmètres
8	Billes			5	6	7				SI	Échanges, addition soustraction
9	Les neuf cases			5	6	7				BB	Arithmétique, critères de divisibilité
10	Arc en ciel			5	6	7				GP	Arithmétique, classe de reste
11	Chats en files				6	7	8			UD	Classe de reste
12	Crème au chocolat				6	7	8			GTCP	Proportionnalité
13	Une spirale particulière				6	7	8	9	10	GP	Arithmétique, progressions
14	Tomates séchées						8	9	10	MI	Proportionnalité, variation du coefficient
15	Division par 7						8	9	10	GP	Arithmétique, classe de reste
16	Partage d'un carré						8	9	10	GP	Géométrie, triangle rectangle
17	Pyramides de cubes						8	9	10	BB	Arithmétique, progressions
18	Jardin géométrique							9	10	PR	Géométrie, triangle rectangle
19	La paroi carrelée							9	10	GTGP	Géométrie, pavage rectangulaire

1. COULEURS ET NEVEUX (Cat. 3, 4)

Tante Alice a acheté trois bonnets : un bleu, un jaune et un vert pour offrir à ses trois neveux. Elle sait que :

- Marc aime le bleu et le vert ;
- Richard n'aime pas le bleu ;
- Léo n'a pas de préférences particulières.

De combien de façons Alice peut-elle distribuer les bonnets à ses neveux en respectant leurs préférences ?

Indiquez toutes les façons de distribuer les bonnets et montrez comment vous les avez trouvées

---

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Reconstituer les relations entre trois critères (couleurs) et trois personnages, à partir d'indications données par des informations affirmatives ou négatives.

Analyse de la tâche

Comprendre qu'il s'agit de chercher les différentes répartitions des bonnets selon les goûts de chaque neveu.

Savoirs en jeu : opérations logiques (ou exclusif, affirmation, négation) et recherche de toutes les solutions

Il y a de nombreux moyens d'organiser la recherche, avec différents types de diagrammes (tableau, arbre, flèches) ou listes.

Par exemple

- si Marc a le bleu, Richard peut avoir le vert et Léo le jaune ou Richard le jaune et Léo le vert. (deux possibilités)
- si Marc a le vert, Richard doit avoir le jaune et Léo le bleu (une possibilité)

Attribution des points

4 Réponse correcte « les 3 possibilités : M bleu, R vert, L jaune / M bleu, R jaune, L vert / M vert, R jaune, L bleu », avec description de la procédure suivie (diagramme, organisation des choix possibles, déductions explicites …)

3 Réponse correcte avec les trois possibilités sans description de la procédure
ou deux possibilités correctes avec description de la procédure

2 Deux possibilités correctes sont trouvées sans description de la procédure
ou une seule possibilité avec organisation incomplète des choix ou diagramme incomplet …
ou deux possibilités correctes et d'autres incorrectes

1 Une seule possibilité correcte sans explication

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4

Origine : Riva del Garda

2. LES TRIPLÉS (Cat. 3, 4)

Les trois enfants André, Marc et Jules sont des triplés.

Avant chaque repas l'un des trois doit mettre la table. Pour éviter les disputes, leur mère leur montre les jours du calendrier de l'année 2024 et laisse choisir à chacun l'une des trois possibilités suivantes.

Mettre la table

- lorsque le jour s'écrit seulement avec les chiffres impairs 1, 3, 5, 7, 9,
- lorsque le jour s'écrit seulement avec les chiffres pairs 0, 2, 4, 6, 8,
- lorsque le jour s'écrit avec un chiffre pair et un chiffre impair.

André dit : « Je choisis la première possibilité car j'aurai moins de jours où je devrai mettre la table que mes frères. »

André a-t-il raison ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer parmi les jours du calendrier ceux qui s'écrivent seulement avec des chiffres pairs, avec des chiffres impairs ou avec un chiffre pair et un chiffre impair et trouvez lesquels sont les moins nombreux.

Analyse de la tâche

Comprendre qu'il faut faire correspondre chaque jour aux nombres de 1 ou 2 chiffres qui le signale sur le calendrier.

Pour aborder la recherche il faut savoir reconnaître les trois types de nombres parmi ceux de 1 à 31.

La solution exige un inventaire :

- les 11 nombres écrits avec les chiffres « impairs » ; 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 31
- les 9 nombres écrits avec les chiffres « pairs » ; 2, 4, 6, 8. 20. 22, 24 26, 28
- les 11 nombres d'un chiffre impair et d'un chiffre pair : 10, 12, 14, 16, 18, 21, 23, 25, 27, 29, 30

puis une réflexion sur le choix le plus avantageux pour tous les mois et années

Tableau des jours par mois (pour aider les personnes qui vont attribuer les points)

	chiffres impairs	chiffres pairs	chiffres « mixtes »
- 7 mois di 31 jours	11	9	11
- 4 mois di 30 jours	10	9	11
- 1 mois di 29 jours	10	9	10
- ou 1 mois di 28 jours	10	9	9

Les données de ce tableau permettent de dire que André a tort parce que, pour chaque mois de 28, 29, 30, 31 jours (que l'année soit bissextile ou non ne change rien) le nombre de jours avec chiffres pairs est inférieur au nombre de jours avec chiffres impairs.

Attribution des points

4 Réponse correcte « André a tort » ou « André devrait choisir les chiffres pairs » basée sur les indications du nombre de jours qui s'écrivent avec des « chiffres impairs » ou qui s'écrivent avec des « chiffres pairs », pour les mois de 29, 30 et 31 jours

3 Réponse correcte, basée sur les indications du nombre de jours qui s'écrivent avec des « chiffres impairs » ou qui s'écrivent avec des « chiffres pairs ». pour les mois de 28, 30 et 31 jours (ne savent pas que février 2024 a 29 jours)

2 Réponse correcte, avec indications du nombre de jours qui s'écrivent avec des « chiffres impairs » ou qui s'écrivent, sans distinction des trois typologies de mois
ou réponse erronée due à quelques erreurs dans l'inventaire

1 Réponse correcte sans aucune autre indication
ou début de raisonnement correct (par exemple sur un seul mois)

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4

Origine : Le ruban des nombres (ral. 23.I.04 ; cat. 3-5)

3. **EN TRAIN** (Cat. 3, 4)

Un train de 129 mètres de long est formé d'une locomotive de 21 mètres de long et de six wagons de même longueur.

On accroche encore 3 wagons de même longueur à l'arrière du train.

Quelle est la longueur du train après y avoir accroché les trois derniers wagons ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Calculer la longueur d'un train après y avoir accroché trois nouveaux wagons, connaissant la longueur de la locomotive (21 m) et du train avec six wagons (129)

Analyse de la tâche

Se représenter, mentalement ou par un dessin, le premier train avec ses six premiers wagons, les longueurs 129 et 21 puis le deuxième train avec 3 wagons de plus qui entraînera une augmentation de la longueur totale.

Les connaissances nécessaires sont l'addition et la soustraction, puis la multiplication (ou l'addition répétée) et la division (ou soustractions successives) des premiers nombres naturels (inférieurs à 150).

La tâche mathématique consiste à organiser et effectuer les opérations. Par exemple :

- Calculer la longueur des six premiers wagons : 129 – 21 = 108
- Calculer la longueur d'un wagon 108 : 6 = 18 ou 6 × ? = 108
- Trouver la longueur des trois nouveaux wagons 18 × 3 = 18 + 18 + 18 = 54
- Calculer la longueur du nouveau train 54 + 129 = 183

Attribution des points

4 Réponse correcte « 183 m » avec descriptions claires et complètes (par exemple, les calculs et leur interprétation

3 Réponse correcte avec descriptions partielles ou peu claires (des calculs sans les explications)

2 Réponse correcte sans description
ou une seule erreur de calcul avec descriptions claires et complètes
ou réponse 162 (seulement pour les 6 + 3 wagons)

1 Début de recherche cohérente (par exemple : schéma partiel ou complet du premier train et/ou du deuxième train)

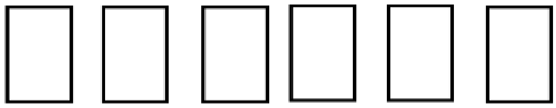
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4

Origine : Archives ARMT

4. LA NOUVELLE VALISE (Cat. 3, 4, 5)

Dans chacune des six cases du cadenas de sa nouvelle valise, Mario doit faire apparaître un nombre d'un seul chiffre : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.



- la somme des six nombres est 38 ;
- le quatrième nombre est le double du deuxième ;
- le cinquième nombre est le triple du deuxième ;
- le premier nombre est le quadruple du deuxième.

Quel est le code qui va permettre à Mario d'ouvrir le cadenas ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Recherche d'un nombre naturel de six chiffres connaissant leur somme, leurs positions et des rapports entre eux.

Analyse de la tâche

- Après la lecture des indications sur les chiffres, observer que trois des relations données se réfèrent au deuxième chiffre et qu'on pourra partir de celui-ci pour une procédure par essais successifs
- Constater que ce deuxième chiffre doit être inférieur à 3 (parce que son quadruple serait un nombre de deux chiffres et qu'il n'y a donc que deux essais à effectuer : 1 ou 2
  - 1 conduirait à 4 1_ 2 3 __ qui ne permettrait pas d'obtenir une somme des chiffres de 38
  - 2 conduit à 8 2_4 6 _ qui ne peut être que complétée par deux chiffres 9 pour d'obtenir une somme des chiffres de 38.
- Le réponse est donc 8 2 9 4 6 9.

Attribution des points

4 Réponse « 829469 » avec description claire et complète (qui mentionne les essais et donne au moins une solution qu'il a fallu écarter, avec la vérification de la somme 38)

3 Réponse « 829469 » avec description incomplète ou seulement une vérification de la somme 38

2 Réponse « 829469 » sans aucune description
ou un autre nombre avec une erreur (de calcul ou de disposition des chiffres)

1 Début de recherche (essais ne tenant pas compte de toutes les relations ou seulement de la somme des chiffres 38)

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4, 5

Origine : Cagliari

5. CHÂTEAUX DE SABLE (Cat. 3, 4, 5)

Alessia et Paolo jouent avec du sable sur la plage ; Alessia utilise un grand seau tandis que Paolo utilise un petit seau et un pot de yaourt.

- Paolo a découvert qu'avec trois pots de yaourt il peut remplir son seau et qu'avec deux de ses seaux il peut remplir le seau d'Alessia.
- Alessia a fait un château avec le sable humide qu'elle est allée chercher en remplissant son seau 7 fois ;
- Pour son château, Paolo est allé chercher du sable humide en remplissant 10 fois son seau et 8 fois son pot de yaourt.

Qui a utilisé le plus de sable pour construire son château ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Comparer deux quantités : 7 grands récipients avec 10 récipients moyens et 8 petits récipients. Les rapports entre les récipients sont 1 grand vaut 2 moyens et 1 moyen vaut 3 petits.

Analyse de la tâche

Percevoir les relations entre les contenances des récipients, en termes d'actions : on remplit le petit seau avec trois pots, …

- Une procédure consiste à suivre les manipulations effectives de la « construction » des châteaux : Alessia va chercher ses 7 seaux qui correspondent à 14 seaux de Paolo. Puis Paolo va chercher ses 10 seaux et constate qu'il en manque 4 pour arriver à la quantité de sable d'Alessia, puis il prend 3 pots pour arriver à 11 seaux, trois autres pots pour arriver à 12 seaux et avec les deux pots il n'arrive pas à remplir le treizième seau. Par conséquent il utilise moins de sable que Alessia.
- Il y a de nombreuses autres procédures de comparaison : avec des dessins de segments, de carrés, … qui permettent de compter les unités communes (pots de yaourt), par des opérations en seaux de Paolo $2 \times 7 = 14$, $14 > 9 + 1 + 1 +$ reste, ou en pots de yaourt : $14 \times 3 = 42$, $10 \times 3 + 8 = 38$, $42 > 38$,

Attribution des points

4 Réponse correcte « C'est Alessia qui utilise le plus de sable » avec descriptions claires : récit chronologique, dessins et comptage, opérations, …

3 Réponse correcte avec description peu claire ou partielle

2 Réponse erronée (faute de calcul ou des règles d'échanges, avec description cohérente)
ou réponse correcte avec les calculs seulement mais sans description des échanges

1 Réponse correcte sans description
ou, début de raisonnement montrant que le principe des échanges est compris mais sans arriver à la solution correcte

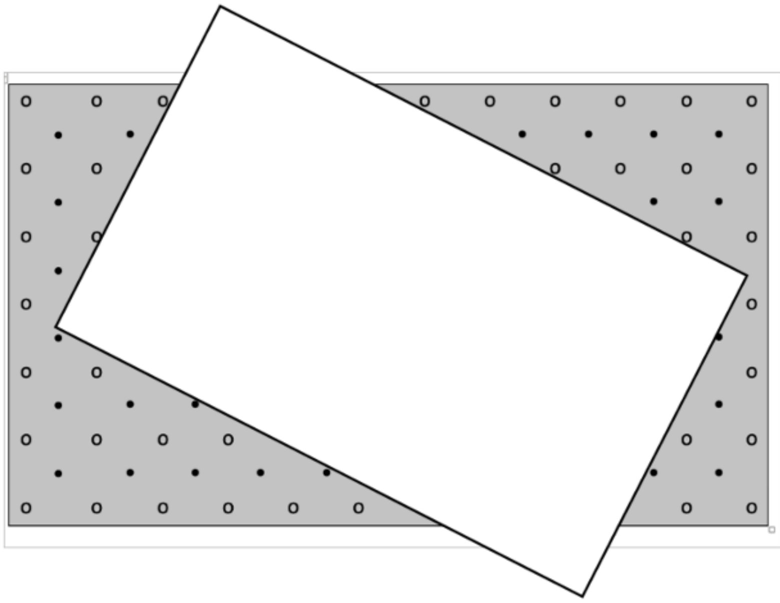
0 Incompréhension du problème.

Niveaux : 3, 4, 5

Origine : GTCP Groupe de travail Calcul Proportionnalité

6. POINTS CACHÉS (Cat. 4, 5)

On a posé une feuille blanche sur un rectangle gris décoré avec deux sortes de points : des blancs (o) et des points noirs (•)



Combien y a-t-il, en tout, de points cachés par la feuille blanche ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer le nombre de points de deux réseaux (sommets d'un quadrillage) alternés de forme rectangulaire, cachés par une feuille blanche.

Analyse de la tâche

Percevoir les deux réseaux de points décalés et leurs alignements.

Les connaissances en jeu sont le comptage un à un des nombres de points de chaque réseau dans les deux directions et, pour les autres procédures, l'addition répétée ou la multiplication.

- Une procédure est de compléter les deux réseaux de points du rectangle gris, en les dessinant sur la feuille blanche (qui exige, pour être efficace, beaucoup de précision et un dessin avec l'aide d'une règle pour les alignements)
- Pour éviter le dessin il y a d'autres procédures faisant appel aux régularités des réseaux quadrillés et aux dénombrements par lignes et colonne pour déterminer le nombre total des points de la feuille et trouver le nombre de points cachés par soustraction des points visibles.

  Il y a 84 points blancs (7 × 12) 66 noirs (6 × 11) ; 150 au total. Les points visibles sont 61 (38 + 23). Il y a donc 89 points caché (150 – 61).

Attribution des points

4 Réponse correcte « 89 points cachés », avec description de la procédure (dessin des points ou détail des opérations)

3 Réponse correcte avec description partielle ou peu claire
ou une erreur de comptage de 1 ou 2 points en plus ou en moins en cas de dessin
ou une erreur de comptage des lignes ou colonnes en cas de calcul

2 Réponse correcte, sans aucune description
- ou erreur de comptage ou de calcul, de 3 à 5 points

1 Début de recherche.

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 4, 5

Origine : La tache (03.II.06 ; cat. 3-5)

7. AVEC 4 TRIANGLES (Cat. 5, 6, 7)

Romeo a un carré de carton de 10 cm de côté. Il l'a découpé comme le montre la figure 1, de telle manière que le triangle central a deux sommets exactement au milieu de deux côtés du carré.

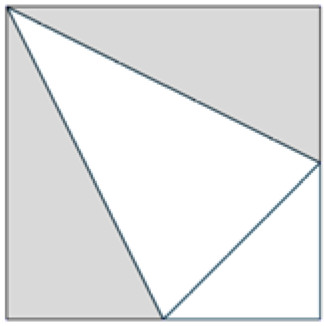


Figure 1

Romeo peut former de nombreuses figures en utilisant ses quatre triangles. Pour chaque couple de triangles, il fait coïncider deux côtés de même longueur.

Par exemple il peut former la figure 2 qui a le même périmètre que celui le carré de départ et la figure 3 qui a un plus grand périmètre. Par contre, la figure 4 ne convient pas car deux triangles n'ont pas un côté de même longueur en commun.

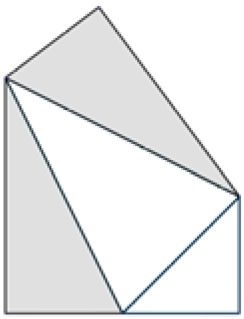


Figure 2

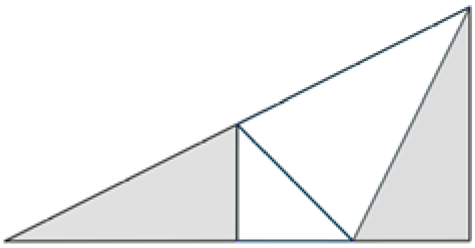


Figure 3

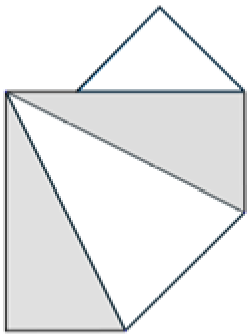


Figure 4

Dessinez une figure formée de ces quatre triangles dont le périmètre est le plus grand possible.

Combien mesure son périmètre ?

Dites pourquoi ce périmètre est le plus grand possible.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Construire un polygone de périmètre maximum en assemblant quatre triangles dont les dimensions se déduisent d'une figure où ils constituent un carré de 10 cm de côté.

Analyse de la tâche

Appropriation : observer les figures et se rendre compte que les deux triangles gris sont rectangles, les deux triangles blancs sont isocèles, le plus petit est isocèle et rectangle. Il y a quatre longueurs de côtés : les petits côtés des trois triangles rectangles, les seconds côtés de l'angle droit des triangles gris (le double des petits), les hypoténuses des triangles gris et les deux côtés isométriques du grand triangle blanc, les deux « bases » des triangles isocèles (blancs). (Au cas où l'on veuille calculer la mesure des périmètres, les quatre mesures de ces côtés sont 5 cm, 10 cm, environ 7 cm et environ 11 cm).

Procédures rencontrées dans ce type de « puzzles »:

A. Par construction de la figure « carré » de 10 cm de côté puis découpage des quatre pièces et recherche d'assemblages jusqu'à estimer quelle est la figure de plus long périmètre. On peut obtenir 8 périmètres possibles différents : entre 64 et 65 cm pour le plus long, puis entre 56 et 57 pour le suivant, puis entre 54 et 55, 52 et 53, 46 et 47, proche de 44, proche de 42 et finalement 40 cm pour le plus court, celui du carré.

B. Par dessin des figures (par exemple sur papier quadrillé) pour donner un exemple de figure pour chaque périmètre différent.

C. Par recherche d'assemblages dont les côtés les plus courts des triangles sont « à l'intérieur » de la figure et les côtés les plus longs sur le pourtour.

« L'explication » du périmètre maximum est liée à la procédure C mais peut aussi dériver des procédures A et B par les nombreux essais qui aboutissent progressivement à l'énumération des différents périmètres possibles.

Les trois figures de périmètre maximum (entre 64 et 65 cm) sont celles de la figure 5.

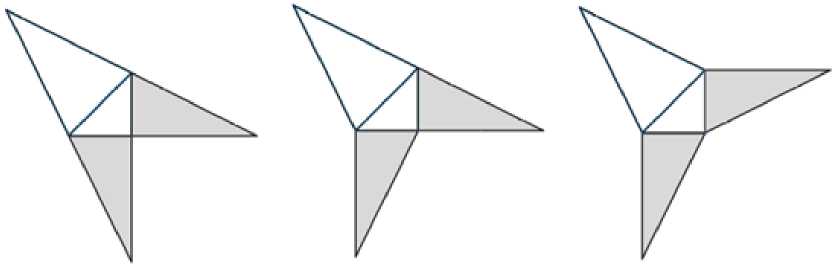


Figure 5

Un exemple de figure de périmètre entre 56 et 57 cm (le deuxième en ordre de grandeur) est celui de la Figure 6.

Un exemple de figure de périmètre entre 54 et 55 cm (le troisième en ordre de grandeur) est celui de la Figure 7.

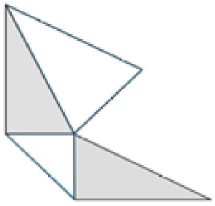


Figure 6

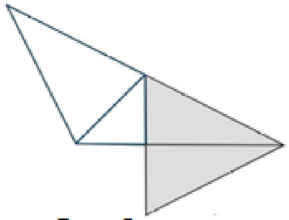


Figure 7

Attribution des points

4 Dessin d'une des trois combinaisons possibles de périmètre maximum (Fig.5), avec calcul du périmètre (de 64 à 65 cm) ou avec une explication raisonnée (par exemple les plus longs côtés à « l'extérieur », le plus courts à « l'intérieur »)

3 Dessin d'une des trois combinaisons possibles de périmètre maximum (Fig.5), avec calcul du périmètre (de 64 à 65 cm), sans explication raisonnée du maximum
ou dessin d'une des combinaisons possibles du deuxième périmètre (de 56 à 57 cm par exemple Fig 6), avec explications

2 Dessin d'une des combinaisons possibles du troisième périmètre (de 54 à 55 cm) par exemple Fig 7) avec ou sans explications

1 Dessin d'une des combinaisons possibles de périmètre inférieur

0 Incompréhension du problème.

Niveaux : 5, 6, 7

Origine : Bourg-en-Bresse et *Assemblages de triangles* (I) (ral. 28.I.07 ; cat. 5-6)

8. BILLES (Cat 5, 6, 7)

La grand-mère met des billes dans deux sacs qu'elle offre à ses petits-enfants Robert et Léo. Elle leur dit :

- Il n'y a pas le même nombre de billes dans vos deux sacs.
- Si Robert en donne une des siennes à Léo, Léo en aura le double de Robert.
- Mais si c'est Léo qui donne une de ses billes à Robert, vous en aurez tous les deux le même nombre.

Combien y a-t-il de billes dans les sacs de Robert et de Léo ?

Montrez comment vous avez trouvé ces deux nombres.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver deux nombres tels que, si l'on diminuait le premier de 1 et que l'on augmentait le second de 1 le second serait le double du premier, et si l'on diminuait le second de 1 et que l'on augmentait le premier de 1, les deux nombres seraient égaux.

Analyse de la tâche

La lecture du texte doit faire comprendre que les nombres de billes se déterminent à partir des deux échanges proposés et que lorsqu'un des enfants donne l'une de ses billes à l'autre son sac en contiendra un de moins et le sac de l'autre en contiendra un de plus.

Les connaissances en jeu se limitent à l'addition ou la soustraction de 1 et au « double de ».

Sans connaissances algébriques, on peut éventuellement se rendre compte de l'écart de 2 entre les nombres de Léo et de Robert ou sinon procéder cas par essais, sachant qu'il faut à chaque fois choisir un des deux nombres, en déduire l'autre par une des deux relations données et procéder à la vérification de la deuxième relation. Par exemple si Robert avait 10 billes, en en donnant 1 à Léo il lui en resterait 9 et Léo en aurait le double, (selon la première relation) c'est-à-dire 18 et, sans compter celui qu'il vient de recevoir, Léo en aurait eu 17 à l'origine. La situation d'origine serait alors 10 pour Robert et 17 pour Léo. Mais cette situation ne vérifie pas la seconde relation : Robert en aurait 11 et Léo 16, les nombres ne seraient pas égaux.

- Poursuivre progressivement les essais, pour arriver à l'égalité dans le deuxième couple (5 ; 7) => (6 ; 6).
- Les essais peuvent aussi être organisés à partir du nombre de billes du sac de Leo et de la relation d'égalité après le deuxième échange, qui fait apparaître que, à l'origine, Léo a 2 billes de plus que Robert.

Dans tous les cas, la solution est que le sac de Robert contient 5 billes e celui de Léo en contient 7.

Attribution des points

4 Réponse correcte : « le sac de Robert contient 5 billes et celui de Léo 7 », avec description claire de la procédure et des essais effectués

3 Réponse correcte, avec description peu claire de la procédure ou sans les essais

2 Réponse correcte sans aucune description

1 Début de raisonnement correct (par exemple reconnaissance que Léo a plus de billes que Robert) mais sans arriver à conclure en raison d'erreurs de calcul ou manque de vérification

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6, 7

Origine : Siena, d'après Chocolat en scène (ral. 29.II.07 ; cat. 5-6)

9. LES 9 CASES (Cat. 5, 6, 7)

Dimitri a placé 9 jetons numérotés de 1 à 9 sur cette grille.

Puis il a multiplié les trois nombres notés sur les jetons de chaque ligne et de chaque colonne et a écrit les produits sur les bords de la grille.

Son chat est passé sur la grille et il a enlevé tous les jetons. Il ne reste que les produits écrits sur les bords.

			72
			72
			70
64	**42**	**135**	

Écrivez dans les cases les nombres qui s'y trouvaient.

Trouvez toutes les possibilités, et, si nécessaire, dessinez d'autres grilles à compléter.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Placer dans une grille de 3 × 3 les nombres de 1 à 9 dont on connaît les six produits des trois nombres alignés horizontalement et verticalement.

Analyse de la tâche

Les connaissances nécessaires sont la multiplication de nombres naturels et la décomposition en facteurs premiers et/ou les critères de divisibilité.

- Une procédure « élémentaire » est celle des essais successifs, jusqu'à ce que les produits des trois lignes et trois colonnes correspondant au placement des nombres de 1 à 9.
- Une procédure plus élaborée fait appel aux critères de divisibilité ou à la décomposition des nombres de 1 à 9 et des 6 produits donnés et s'appuie sur un raisonnement logico-déductif et sur l'associativité de la multiplication, par exemple :
  - le 5 ne peut être que dans la troisième colonne et la troisième ligne dont les produits sont des multiples de 5
  - à gauche du 5, les deux nombres de la troisième ligne ont un produit de 14 (70 : 5) ou 2 × 7.
  - Le « 7 » ne peut pas être dans la première colonne (car 64 n'est pas un multiple de 7) il est donc dans la deuxième colonne et le « 2 » dans la première colonne.
  - Le produit des deux nombres de la deuxième colonne (au-dessus du 7) est 6 (42 : 7) et ces deux nombres sont 1 et 6 (car le « 2 est déjà pris) placés en première ou en deuxième ligne.
  - Le « 9 » ne peut pas être dans la première colonne (car 64 n'est pas un multiple de 9, il est donc dans la troisième colonne, à la première ou la deuxième ligne.
  - Pour chacune des deux dispositions du « 1 », « 2 » et « 9 » entre la première et la deuxième ligne, il ne reste qu'une seule façon de compléter la grille.

4	6	3	**72**
8	1	9	**72**
2	7	5	**70**
64	**42**	**135**	

8	1	9	**72**
4	6	3	**72**
2	7	5	**70**
64	**42**	**135**	

Attribution des points

4 Réponse correcte et complète (les 2 grilles possibles)

3 Une grille correcte et l'autre incomplète ou avec erreurs

2 Une grille correcte seulement (la deuxième possibilité n'a pas été trouvée)

1 Début de remplissage de la grille qui correspond à quelques produits

0 Incompréhension du problème.

Niveaux : Cat. 5, 6, 7 **Origine :** Bourg-en-Bresse. Produits en ligne (ral. 10.F.10) Produits en triangles (I) (ral. 20.F.12)

10. ARC-EN-CIEL (cat. 5, 6, 7)

Joseph et Marie demandent à leurs amis :

Coloriez les nombres de ce tableau avec les couleurs de l'arc-en-ciel …

… en rouge lorsque le reste de leur division par 7 est 0,

… en orange, lorsque le reste de leur division par 7 est 1

… en jaune, lorsque le reste de leur division par 7 est 2,

… en vert, lorsque le reste de leur division par 7 est 3,

… en bleu, lorsque le reste de leur division par 7 est 4,

… en indigo, lorsque le reste de leur division par 7 est 5,

… en violet, lorsque le reste de leur division par 7 est 6.

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
10	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**
20	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**
30	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**
40	**41**	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**	**49**
50	**51**								

Joseph choisit un nombre jaune plus grand que 50, Marie choisit un nombre vert plus grand que 50. Ils additionnent ces deux nombres et ils demandent à leurs camarades de deviner la couleur du nombre obtenu.

François dit : « Je pense qu'il sera jaune ou vert. »

Clara dit : « On ne peut pas savoir ; il peut être de n'importe quelle couleur. »

Angela dit : « Il sera rouge. »

Anne-Marie dit : « Il sera indigo. »

Coloriez aussi les nombres du tableau, puis lisez les réponses de François, Clara, Angela et Anne-Marie.

Si l'un de ces quatre élèves a raison, dites lequel et pourquoi.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Partager l'ensemble des nombres naturels en sept sous-ensembles de nombres qui, par la « division » par 7, donnent des restes de 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)

Analyse de la tâche

Percevoir, par une discussion au sein du groupe, les relations entre l'algorithme de la « division par 7 avec reste », les opérations de multiplication, de soustraction et les multiples de 7.

Compléter le tableau :

- Se rendre compte que les nombres dont le reste est 0 lorsqu'on les divise par 7 sont 0, 7, 14, … c'est-à-dire les multiples de 7 !
- Trouver les nombres dont le reste est 1 lorsqu'on les divise par 7 sans faire des essais en appliquant l'algorithme, mais en se référant aux nombres qui valent « un de plus qu'un multiple de 7 », etc.
- Voir apparaître des régularités dans le coloriage et prendre conscience que les sept couleurs suffisent pour colorier tous les nombres, du tableau et les suivants. (C'est la première tâche, qui vaudra 2 pts si elle est complétée)

- Choisir un nombre jaune et un nombre vert, comme Joseph et Marie puis les additionner. Recommencer avec d'autres choix pour arriver à la conviction que la somme est toujours un nombre indigo et que c'est Anne-Marie qui semble avoir raison. (Deuxième tâche)
- Essayer d'exprimer une raison à cette conviction naissante, par exemple à partir de l'addition des deux premiers nombres jaune et vert (2 et 3) dont la somme est un nombre indigo (5). (Troisième tâche, qui ne peut pas être une démonstration formelle en raison de l'âge des élèves, mais le besoin de se persuader que « ça marche pour n'importe quel choix des deux nombres, jaune et vert)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51								

Attribution des points

4 Réponse correcte « C'est Anne-Marie qui a raison », avec un coloriage complet et correct du tableau au moins jusqu'à 51, avec le choix des deux nombres plus grands que 50, au moins autres essais et une tentative d'argumentation (par exemple 2 (jaune) et 3 (vert) qui, additionnés, donnent 5 (indigo)

3 Réponse correcte, avec un coloriage complet, le choix des deux nombres plus grands que 50, leur somme et leur couleur la description d'au moins un autre essai sans tentative d'argumentation

2 Réponse correcte et un seul choix des deux nombres
ou seulement le coloriage complet

1 Réponse correcte, coloriage incomplet
ou autre réponse que celle d'Anne-Marie et coloriage incomplet

0 Incompréhension, u problème.

Niveaux : 5, 6, 7

Origine : Groupe problèmes

11. CHATS EN FILES (Cat. 6, 7, 8)

Dans un petit village de Transalpie, il y a une communauté de chats.

Ces derniers temps leur nombre a augmenté, et on n'arrive plus à les compter, mais on sait qu'il n'y en a pas plus de 400.

On décide alors de les aligner par rangs de 6 : Félix, un chat tout noir, est le seul qui reste isolé.

On tente alors de les aligner par rangs de 7, mais Félix reste de nouveau seul.

Si on les met par rangs de 8, Félix reste encore seul.

Félix s'éloigne des autres en murmurant : « J'ai au moins compris combien nous sommes et pourquoi je reste toujours seul.»

Combien peut-il y avoir de chats dans le village ?

Montrez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver les nombres inférieurs à 400 qui valent 1 de plus qu'un multiple de 6, qu'un multiple de 7 et qu'un multiple de 8

Analyse de la tâche

S'approprier la situation et comprendre que le nombre cherché vaut un de plus qu'un multiple de 6, qu'un multiple de 7 et qu'un multiple de 8.

- En déduire qu'il faut chercher le plus petit multiple commun de 6, 7 et 8, 168, et y ajouter 1 pour obtenir la première solution, 169 et que 337 (= 2 ×168 +1) est aussi une solution alors que les autres dépasseront 400 et ne peuvent pas être prises en compte.
- Une autre procédure consiste à décomposer les trois nombres en facteurs premiers ($6 = 2 \times 3$; $7 = 7 \times 1$; $8 = 2^3$) et calculer le produit des facteurs qui figurent dans chacun des trois nombres $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 168$, puis y ajouter 1 pour arriver au nombre de chats, Félix y compris.
- D'autres procédures, par essais permettent aussi d'arriver à 169 et 337.

Attribution des points

4 Réponses correctes « 169 et 337 » avec explications claires et complètes (calculs, décomposition des trois nombres ou et/ou recherche de multiples communs, ou inventaire des essais)

3 Réponses correctes avec explications peu claires ou incomplètes

2 Réponses correctes sans explications
ou une seule réponse correcte (169 ou 337) avec explications
ou réponses 168 et 336 sans ajouter 1 au plus petit multiple commun
ou réponses 169 et 338 obtenues par 2 ×169 plutôt que 2 ×168 +1

1 Début de recherche (par exemple quelques essais qui témoignent d'une recherche de produits des nombres donnés)

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7, 8

Origine : Udine

12. CRÈME AU CHOCOLAT (Cat. 6, 7, 8)

Céline, Jeanne et Sophie utilisent la même recette pour préparer chacune une crème au chocolat. Pour bien réussir cette crème, il ne faut pas se tromper dans les quantités d'œufs et de chocolat.

Céline a utilisé 6 œufs et 190 grammes de chocolat.

Jeanne a utilisé 8 œufs et 250 grammes de chocolat.

Sophie a utilisé 9 œufs et 285 grammes de chocolat.

L'une des trois filles n'a pas utilisé la bonne quantité de chocolat.

Laquelle des trois filles n'a pas utilisé la bonne quantité de chocolat ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Parmi les trois couples (6 ; 190), (8 ; 250) et (9 ; 285 trouver celui qui n'est pas proportionnel aux deux autres, dans un contexte de recette de crème au chocolat.

Analyse de la tâche

Comme il s'agit d'un problème de recette culinaire, les deux ingrédients mentionnés doivent être proportionnels, c'est-à-dire que, par définition, les trois rapports doivent être égaux.

La vérification se réduit au calcul des trois rapports :

Pour Céline : 190 / 6 = 95 / 3 le rapport est un nombre rationnel dont une approximation décimale est 31,67.

Pour Jeanne le rapport est 250 / 8 = 125 / 4 = 31,25

Pour Sophie le rapport est 285 / 9 = 95 / 3. C'est le même que celui de Céline.

En déduire que c'est Jeanne (8 ; 250) qui n'a pas utilisé la bonne quantité de chocolat.

Il y a d'autres procédures mettant en œuvre les propriétés (intuitives) de la proportionnalité. Par exemple, passer de 6 à 24 œufs par une multiplication par 4 et de 8 à 24 œufs par une multiplication par 3 et constater que $4 \times 190 \neq 3 \times 250$.

Attribution des points

4 Réponse exacte « Jeanne s'est trompé » avec une explication complète

3 Réponse exacte avec une explication peu claire

2 Réponse fausse suite à une erreur de calcul, mais le raisonnement est entièrement correct

1 Réponse exacte sans explication
ou réponse fausse ou absente, mais la proportionnalité est prise en compte dans une partie des calculs

0 Incompréhension du problème

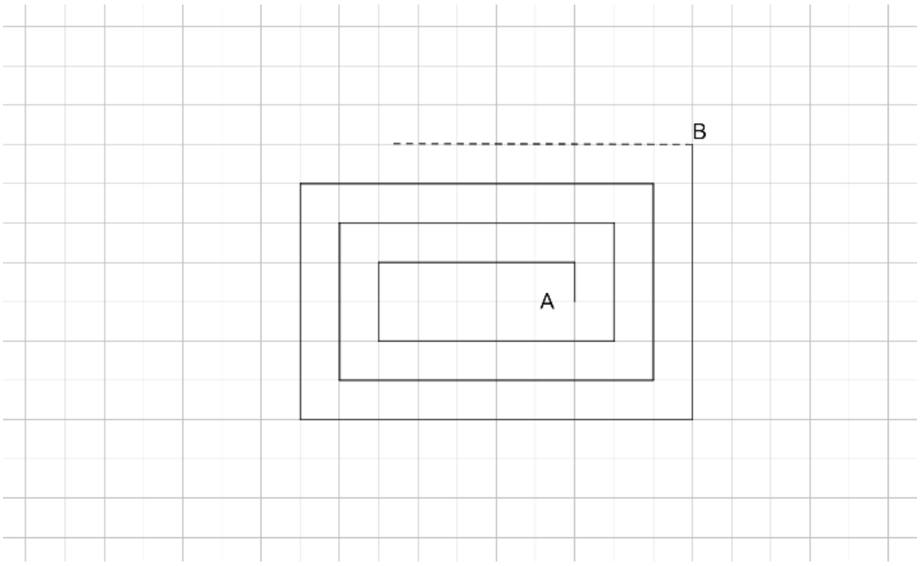
Niveaux : 6, 7, 8

Origine : Groupe Problèmes variation de *Mousse au chocolat* *(ral. 20.I.10 ; cat. 5-7)*

13. UNE SPIRALE PARTICULIERE (Cat 6, 7, 8, 9, 10)

Jeanne a une feuille de papier quadrillé, sur laquelle les carreaux ont un côté de 1 cm.

Elle commence à dessiner une spirale comme celle que vous voyez sur la figure ; elle part de A, se déplace verticalement vers le haut de 1 carreau, puis horizontalement vers la gauche de 5 carreaux, puis de nouveau verticalement, vers le bas, de 2 carreaux, puis horizontalement vers la droite de 6 carreaux, et ainsi de suite.



Arrivée au point B, sa spirale a déjà 13 segments (6 horizontaux et 7 verticaux). Jeanne décide de continuer sa spirale jusqu'au 50e segment.

Combien mesurera, en centimètres, la spirale de Jeanne ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Calculer la somme des 50 premiers termes de deux progressions arithmétiques alternées (1 + 2 + ... + 23 + 24 + 25) + (5 + 6 + 7 + … + 28 + 29), à partir du dessin d'une « spirale » sur quadrillage.

Analyse de la tâche

Observer la spirale et comprendre les règles de sa construction : les mesures des segments en cm, aussi bien horizontaux que verticaux, augmentent chaque fois de 1 cm. La prolonger éventuellement de quelques segments.

Les connaissances nécessaires se limitent à l'addition et une mise en œuvre de ses propriétés.

- Constater qu'il y aura 25 segments verticaux et 25 horizontaux. Déterminer la mesure des segments verticaux est 1, 2, 3, 4, ... , 25, celle des segments horizontaux 5, 6, 7, 8, 9, … , 29 et qu'il s'agira d'additionner ces 50 nombres.
- Pour éviter l'addition des 50 termes il est possible de les regrouper par commutativité, associativité et distributivité.

  Par exemple (1 + 5) + (2 + 6) … conduit à une addition de 25 termes : 6 + 8 + … + 52 + 54 puis un regroupement des termes (6 + 54) + (8 + 52) + (10 + 50) conduit à 60 + 60 + 60 + … + 60 + 30 = 12 · 60 + 30 = 750
- Il y a évidemment de nombreuses autres manières d'arriver à la longueur de la spirale

Attribution des points

4 Réponse correcte « 750 cm » avec explications claires (calculs détaillés, inventaire des longueurs de segments, ...)

3 Réponse correcte avec explications sans le détail des nombres à additionner
ou réponse avec une seule erreur (oubli ou confusion d'un terme, erreur de calcul)

2 Réponse correcte sans explication ni détails des nombres à additionner
ou réponse avec deux ou trois erreurs (oubli ou confusion de deux ou trois termes, erreurs de calcul)

1 Début de raisonnement correct ou réponse avec plus de trois erreurs

0 Incompréhension du problème

Niveaux : Cat. 6, 7, 8, 9, 10 **Origine :** ARMT variante de Une spirale particulière (20.I.15 cat. 7-10)

14. TOMATES SÉCHÉES (Cat. 8, 9,10)

En été, la grand-mère Sophie fait sécher les tomates au soleil avant de les conserver dans l'huile.

Après la récolte, elle en expose 30 kg au soleil. Les tomates fraîchement cueillies contiennent 94 % d'eau ; les 6% d'autres substances ne s'évaporent pas lors du séchage et conservent leur masse.

Après trois jours d'exposition au soleil, l'eau contenue dans les tomates tombe à 91%.

Combien pèsent les tomates maintenant ?

Expliquez comment vous avez trouvé la réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver la masse d'une quantité (30 kg) de tomates qui contiennent 94 % d'eau après avoir séché au soleil pour ne contenir plus que 91 % d'eau.

Analyse de la tâche

Prendre conscience de la composition de la matière qui constitue les 30 kg de tomates. Les biologistes savent qu'elles sont constituées de 94 % d'eau lorsqu'elles sont fraîches ; il faut en déduire que 6 % sont formées "d'autres matières" (fibre végétales, … ou "substance tomate").

Savoir que c'est l'eau des tomates qui s'évapore lorsqu'on les expose au soleil ou à la chaleur et non les autres substances.

- Comprendre alors que les substances qui ne s'évaporent pas représentent 6 % de la masse des 30 kg, par conséquent 1,8 kg (par l'opération « 6 % de 30 kg ou 6/100 · 30 = 1,8 » ou encore par calcul de la masse d'eau et différence avec les 30 kg)
- Vu que la masse de 1,8 kg de "substance tomate" ne varie pas, lorsque les tomates ne contiennent plus que 91% d'eau, ces 1,8 kg représentent 9 % de la masse qui reste.
- Calculer alors cette masse restante encore inconnue (m) par proportionnalité entre les pourcentages et les masses

par exemple en imaginant les relations entre	tomates	eau	« substance tomate »
pourcentages (%)	100	91	9
masses (g)	?	?	1,8

pour trouver que la masse des tomates est 20 (kg), par une équation, par le rapport 9/1,8 = 1/5, par passage à l'unité, par une « règle de trois » ou tout autre méthode à disposition.

Ou : poser et résoudre l'équation : $(2/100)\ x = (1/100)\ 30$

Attribution des points

4 Réponse correcte « 20 kg » avec le détail de toutes les phases du raisonnement

3 Réponse correcte, mais avec des explications peu claires ou incomplètes

2 Réponse correcte sans explications
ou raisonnement correct mais avec une erreur de calcul ou seulement la vérification du résultat correct

1 Début de raisonnement correct

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Milano

15. DIVISION PAR 7 (Cat. 8, 9, 10)

Martine et David choisissent chacun un nombre naturel.

Le nombre choisi par Martine lui donne un reste de 5 lorsqu'elle le divise par 7.

Le nombre choisi par David lui donne un reste de 4 lorsqu'il le divise par 7.

Puis Martine et David additionnent leurs deux nombres et divisent cette somme par 7.

Quel sera le reste de cette division ?

Expliquez pourquoi.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer le reste de la division par 7 d'une somme de deux nombres, sachant que les restes de la division par 7 est 5 pour le premier des deux nombres et 4 pour le second.

Analyse de la tâche

Découvrir une propriété de l'addition de nombres naturels lorsqu'on s'intéresse au reste de leur division par 7 : *la somme d'un nombre dont le reste de la division par 7 est 5 et d'un nombre dont le reste de la division par 7 est 4 est un nombre dont le reste de la division par 7 est 2.* Il faut d'abord vérifier cette propriété sur quelques exemples, puis constater qu'elle semble généralisable à tous les couples choisis puis chercher à expliquer pourquoi.

Les différentes étapes de l'élaboration de la propriété peuvent être les suivantes :

- Se rappeler que les restes de la division par 7 sont les nombres de 0 à 6 et que par conséquent il y a 7 sous-ensembles des nombres naturels lorsqu'on les groupe selon leurs restes d'une division par 7 : les multiples de 7, les nombres qui valent 1 ou 2, ou 3, ou 4, ou 5, ou 6 de plus qu'un multiple de 7.
- Les deux nombres choisis par A et B valent respectivement 5 et 4 de plus qu'un multiple de 7. Quelques essais montrent que la somme de ces nombres vaut 2 de plus qu'un multiple de 7 (Par exemple 75 et 74, donnent 149 qui est 140 + 9 mais aussi 147 + 2)
- Il faut savoir aussi que la somme de deux multiples de 7 est un multiple de 7 (par distributivité)
- Se rendre compte que, dans le cas général un « multiple de 7 » + 5) ajouté à un « multiple de 7 » + 4 donne un « multiple de 7 » + 9 ou un « multiple de 7 » + 7 + 2 et que « un multiple de 7 » + 7 est aussi un multiple de 7.

  (En langage algébrique : si $A = 7a + 5$ et $B = 7b + 4$, la somme $A + B = 7a + 5 + 7b + 4 = 7(a + b) + 4 + 5 = 7(a + b) + 9 = 7(a + b) + 7 + 2 = 7(a + b + 1) + 2$.)

Donc on peut être convaincu que, lorsque l'on revient aux termes de « division par 7 » et de « reste », le reste de la division par 7 de la somme des deux nombres choisis donne un reste de 2.

Attribution des points

4 Réponse correcte « Le reste est 2 » avec la description de plusieurs essais (au moins 3 à 4) et une argumentation qui laisse entrevoir que les élèves se sont rendus compte qu'il faut aller au-delà des vérifications, vers une généralisation « pour tous choix possibles » (par exemple une référence aux deux restes de 5 et de 4 qui, ajoutés, donnent 9 qui, lui-même aura un reste de 2 dans la division par 7). On n'exigera pas une démonstration « formelle »

3 Réponse correcte, avec la description de plusieurs essais, sans argumentation autre que « le reste est 2 pour tous les choix possibles »

2 Réponse correcte avec la description d'un ou deux essais seulement

1 Réponse correcte sans explications

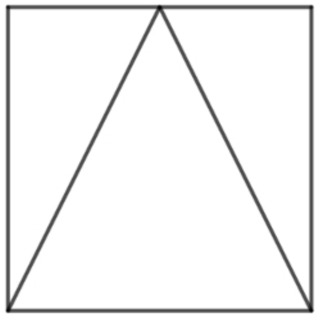
0 Incompréhension du problème
ou réponse incorrecte : du genre, on ne peut pas savoir ou cela dépend des nombres choisis

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Groupe problèmes

16. PARTAGE D'UN CARRÈ (Cat. 8, 9, 10)

Ce carré est partagé en trois triangles par deux segments de 10 cm de longueur.



Quelle est l'aire du carré ?

Expliquez comment vous avez calculé la valeur exacte de cette aire, sans mesurer les distances à la règle graduée.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Calculer l'aire d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse mesure 10 cm et le petit côté mesure la moitié de l'autre côté de l'angle droit

Analyse de la tâche

- Observer la figure et constater que le grand triangle est isocèle, que les deux petits triangles sont égaux, rectangles et dont le petit côté est la moitié du grand côté de l'angle droit (ou des demi-rectangles de 5 × 10)
- Établir alors la relation de Pythagore dans l'un des deux triangles rectangles, par exemple en désignant par c la mesure du petit côté de l'angle droit, le grand côté mesure 2c et la relation c2 + (2c)2 = 102 devient 5c2 = 100 puis c2 = 20 et l'aire du carré 4 c2 = 80.

Attribution des points

4 Réponse correcte « l'aire du carré est 80 cm^2 » avec description détaillée des calculs (reconnaissance des rectangles 1 × 2 et application de Pythagore)

3 Réponse correcte mais avec explications peu claires
ou réponse approximative (par exemple 79,92 cm2) due à l'usage d'écritures décimales de $\sqrt{20}$ ou d'autres nombres irrationnels, avec explications claires

2 Réponse correcte sans explications
ou reconnaissance du rapport 1/2 mais erreur dans la pose de l'équation avec réponse cohérente

1 Début de raisonnement cohérent (perception du rapport 1/2 entre les dimensions des côtés des triangles rectangles)
ou réponse obtenue par mesure sur un dessin du carré

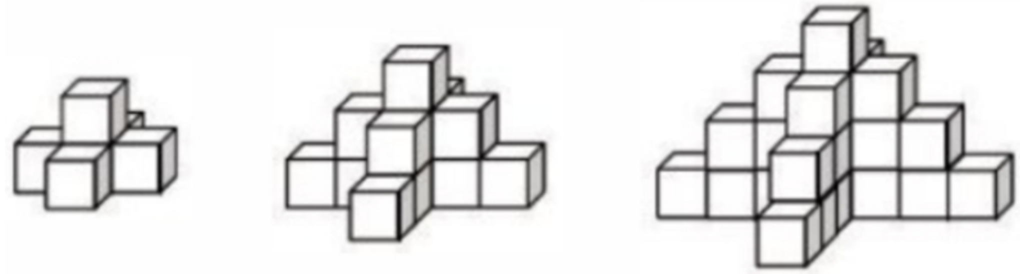
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Groupe problèmes, variante de Partage d'un carré (20.I.19 cat. 9-10)

17. PYRAMIDES DE CUBES (Cat. 8, 9, 10)

Edouard dispose de 2 000 cubes. Il construit des « pyramides » en empilant des cubes. Voici les trois premières pyramides qu'il a construites :



Pyramide à 2 niveaux *Pyramide à 3 niveaux* *Pyramide à 4 niveaux*

À partir du 2e niveau, chaque cube repose sur un cube placé en-dessous de lui.

Il construit ensuite une pyramide à 5 niveaux et continue à en construire d'autres en ajoutant un niveau à chaque nouvelle pyramide construite. Il respecte toujours la même règle de construction et ne démonte pas les pyramides qu'il a déjà construites.

Combien de niveaux aura la dernière pyramide qu'il pourra construire entièrement ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Observer une succession régulière de constructions (« pyramides » de cubes), trouver la progression des nombres de cubes de l'une à la suivante puis de leur somme et déterminer combien on pourra en former avec 2000 cubes à disposition.

Analyse de la tâche

- Observer les trois premières pyramides et comprendre que de l'une à la suivante on ajoute les cubes du niveau inférieur.
- Déterminer **les nombres de cubes de chaque niveau** à partir du haut et trouver l'augmentation d'un niveau à l'autre. C'est-à-dire découvrir la progression arithmétique 1 ; 5 ; 9 ; 13 ; 17 ; 21 ; … de raison 4.
- Passer au **nombre de cubes de chaque pyramide** et découvrir la progression 6 (1 + 5) ; 15 (6 + 9) ; 28 (15 + 13) …
- Passer aux **nombre total de cubes des premières pyramides, ce qui donne la suite** : 6 ; 21(6 + 15) ; 49 (21+ 28) ; 94 ; (49 + 45) …

Tableau des résultats, comme aide pour les personnes qui vont attribuer les points

Nb de : niveaux	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
cubes/niveau ajouté	5	9	13	17	21	25	29	33	37	41	45	49	53	57
cubes/pyramide	6	15	28	45	66	91	120	153	190	231	276	325	378	435
total des cubes –>	6	21	49	94	160	251	371	524	714	945	1221	1546	1924	2359

Attribution des points

4 Réponse correcte « 14 niveaux » avec description complète de la démarche suivie (présence de dessins et/ou calculs ou tableaux conduisant à la réponse)

3 Réponse correcte avec des explications peu claires ou insuffisamment détaillées
ou réponse (13 ou 15 niveaux) avec description

2 Réponse correcte sans explication
ou démarche correcte avec une réponse erronée due à une ou plusieurs erreurs de calcul
ou réponse (12 ou 16 niveaux) avec description

1 Début de démarche correcte (détermination du nombre de cubes utilisés pour construire les trois premières pyramides (49) et compréhension de la règle de passage d'une pyramide à la suivante)

ou réponse 21 niveaux pour ne pas avoir tenu compte du fait que les pyramides déjà construites ne sont pas démontées (c'est à-dire qu'il n'y a qu'une pyramide avec les 2000 cubes à disposition)

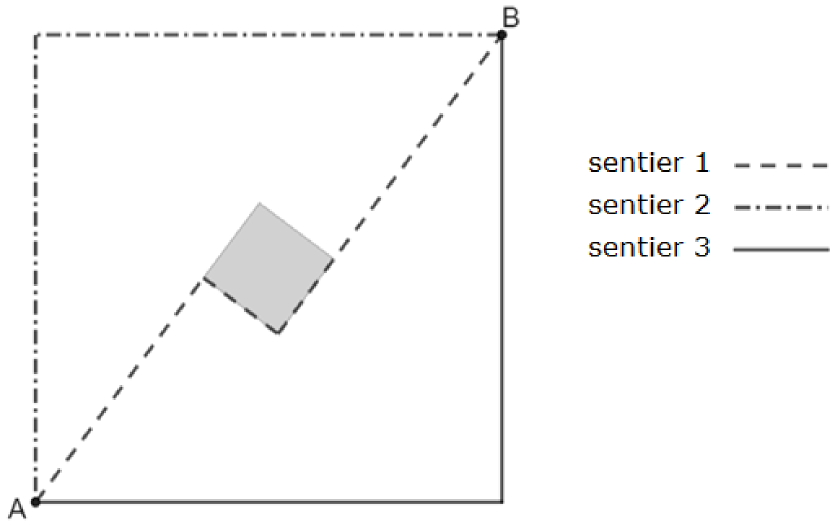
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Bourg-en-Bresse

18. JARDIN GÉOMÉTRIQUE (Cat. 9, 10)

Cette figure représente un grand jardin carré et trois sentiers qui le bordent ou le traversent, selon les lignes indiquées sur le côté. Le carré gris est un petit lac, dont le centre est le même que celui du jardin.



Dans la figure, A et B sont les points d'entrée et de sortie du jardin. Mathieu traverse souvent le jardin pour abréger son parcours de la maison à l'école. Ce matin il est arrivé par l'entrée A et a suivi le sentier 1 : il a marché 300 mètres en ligne droite, puis a tourné à droite pour suivre une rive du lac de 100 mètres de longueur, puis a tourné à gauche pour parcourir encore 400 mètres jusqu'à la sortie B. Mais maintenant, pour rentrer à la maison, il suit le sentier 3, de l'entrée B à la sortie A.

Quelle est la longueur exacte (en mètres) du sentier 3 parcouru par Mathieu à son retour ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

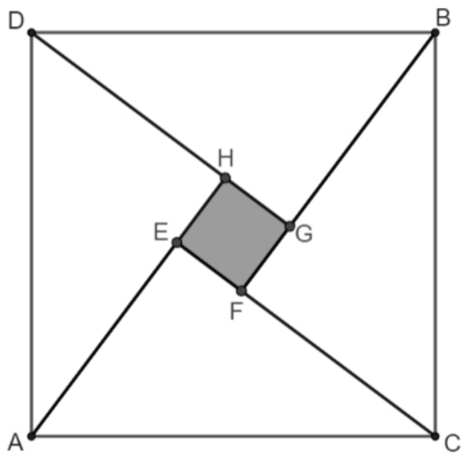
ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver la longueur d'un chemin en la déduisant de celle d'un autre chemin, à l'aide de considérations géométriques basées sur l'égalité de triangles rectangles et sur le théorème de Pythagore.

Analyse de la tâche

- S'approprier la situation : comprendre que, une fois connue la longueur du segment AEFGB (chemin 1), il faut trouver la longueur du segment ADB, chemin 3.



- Considérer les quatre triangles ACE, CBF, BGD, DHA et reconnaître qu'ils sont des égaux et rectangles congrus puisqu'ils ont des hypoténuses et des angles adjacents aux hypoténuses isométriques (par exemple les angles BCF = EAC car ils sont complémentaires de l'angle FCA et FCA = FBC car complémentaires de FCB, de même pour toute paire de triangles considérée)
- En déduire les mesures des côtés des triangles : AE = CF = BG = DH = 300 m ; CE = BF = DG = AH = 400 m
- Appliquer le théorème de Pythagore pour obtenir les mesures des côtés du carré ACBD : AC = CB = BD = DA = 500 m
- Conclure que Mathieu en choisissant le chemin 3, aurait parcouru 1000 m.

Attribution des points

4 Réponse correcte « 1000 m ou 1 km » avec une procédure bien justifiée (démonstration de l'égalité des triangles rectangles et application du théorème de Pythagore)

3 Réponse correcte, mais avec une justification partielle (constater que les triangles sont égaux sans aucune démonstration ou démonstration incomplète ou peu claire)

2 Réponse correcte sans explications ou seulement avec la division du dessin en quatre triangles

1 Début de raisonnement correct (par exemple uniquement subdivision en quatre triangles ou mesures prises sur le dessin et non réelles)

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 9, 10

Origine : Parma, en référence au problème Promenade dans le parc (ral. 18.I.18 ; cat. 9-10)

19. LA PAROI CARRELÉE (Cat. 9, 10)

Sara a trouvé dans le grenier un certain nombre de carreaux carrés de 20 cm de côté.

Elle remarque que si elle utilisait tous ces carreaux, sans en couper aucun, et sans laisser d'espaces, elle pourrait recouvrir exactement le mur de sa buanderie de 2,8 m de longueur jusqu'à une hauteur de 1,40 m à partir du sol.

Elle préfèrerait cependant disposer les carreaux avec leurs diagonales horizontales et verticales. Elle sait que pour cette disposition du carrelage « en oblique » elle devrait couper les carreaux du bord le long de leur diagonale en deux demi-carrés égaux, des triangles et qu'elle devrait éventuellement encore découper quelques-uns de ces triangles en deux triangles égaux, des quarts de carreaux. Mais elle ne voudrait pas de pièces plus petites que ces quarts de carreaux.

Elle veut évidemment que son carrelage soit un rectangle, qu'il occupe la plus grande partie possible des 2,8 m de la paroi et qu'il utilise le plus grand nombre possible des carreaux disponibles.

Quelles seraient les deux dimensions du carrelage rectangulaire "en oblique" qui satisferait les souhaits de Sara et combien utiliserait-elle de carreaux ?

Expliquez comment vous avez trouvé ces deux dimensions.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer les modifications des dimensions d'un pavage rectangulaire par des carrés lorsqu'on passe d'une disposition dans laquelle les carrés ont leurs côtés parallèles aux bords du rectangle à une disposition où ce sont les diagonales des carrés qui sont parallèles aux côtés du rectangle.

Analyse de la tâche

Comprendre les contraintes du carrelage : un mur de 280 cm qui limite la longueur du rectangle mais dont il doit s'en approcher au maximum et le choix de ne découper les carreaux, qu'en deux ou quatre triangles.

La résolution exige plusieurs étapes.

- Un dessin et une étude très attentive des propriétés du pavage « oblique » par des carrés et demi-carrés avec les diagonales parallèles aux côtés du rectangle :

figure 1  figure 2  figure 3 

- Les deux carreaux de la figure 1 après découpage et déplacement forment un seul carré avec, soit un carreau à l'intérieur entouré de quatre « triangles-quarts-de-carreaux », en figure 2, ou en quatre « triangles-demi-carreaux ». en figure 3. C'est une connaissance préliminaire, élémentaire acquise par découpages, dessins, collages… qui sera indispensable pour la suite.
- Puisque l'aire d'un carreau de 20 cm de côté est 400 (en cm^2), l'aire du carré (figure 2) est 800 (en cm^2), et le côté du carré est $\sqrt{800}$ (en cm) ou $\sqrt{(400 \times 2)}$ ou $20 \times \sqrt{2}$ ou encore $\mathbf{20\sqrt{2}}$. Cette écriture est un obstacle (Il s'agit d'une connaissance un peu moins élémentaire car elle fait appel à des nombres qu'on ne peut pas écrire autrement vu que les nombres décimaux n'en donnent que des approximations ; ici $\approx 28{,}2$)
- Le raisonnement précédent conduit au rapport entre la longueur du côté de tout carré et de sa diagonale. Rapport qui, à ce niveau, doit être connue. Le fait de devoir retrouver ce rapport en appliquant le théorème de Pythagore est un autre obstacle (une étape supplémentaire et inutile) Mais possible !, de caractère didactique, pour ce problème.
- Lorsqu'on dispose de la connaissance que la diagonale des carreaux mesure $20\sqrt{2}$, il faut constater, par un dessin ou des déplacements effectifs de carreaux, que le pavage d'un rectangle dans la disposition « oblique » où les carreaux ont leurs diagonales parallèles aux côtés du rectangle peut s'organiser à l'intérieur d'un réseau (ou quadrillage) dont les côtés des carrés mesurent : $20\sqrt{2}$ (en cm). Le découpage des carreaux peut se limiter à des « triangles-demi-carreaux », dans certains cas favorables, comme dans la figure 4, de 3 rangs sur 4, et exige parfois un découpage plus fin en « triangles-quart- de-carreaux », comme dans la figure 5, qui permet en particulier de former des demi-rangs : 3 rangs sur 4,5 rangs.

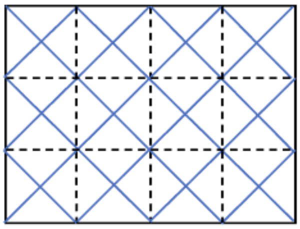


Figure 4

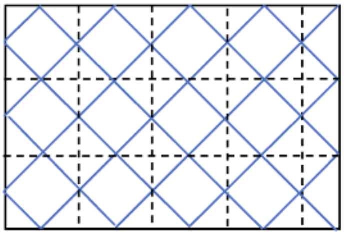


figure 5

- En se référant à ce nouveau quadrillage on retrouve les procédures habituelles de détermination des dimensions du nouveau rectangle en différentes étapes
- Le calcul du nombre de carreaux entiers ((140/20 · 280/20 = 7 · 14 = 98)
- Dans la longueur du mur on peut placer 280 : $(20\sqrt{2}) \simeq 9{,}9$ rangs (en colonnes). Avec les contraintes sur le découpage des carreaux, il faut se contenter de 9,5 rangs, ce qui donne une longueur de $9{,}5 \times (20\sqrt{2}) \simeq 268.8$ (en cm)
- 9,5 rangs dont la largeur est celle d'un côté de carré du réseau contiennent chacune 19 carreaux, au total 95 carreaux, sur 5 rangs en lignes. (On a ainsi 3 carreaux inutiles)
- La hauteur du rectangle est celle de ces 5 rangs en ligne : $5 \times (20\sqrt{2}) = 100\sqrt{2} \approx 141{,}4$.

Attribution des points

4 Réponse correcte et complète « $20\sqrt{2} \times 9{,}5$) de longueur ou ≈ 268,8 et $100\sqrt{2}$ ou ≈ 141,4 de hauteur (en cm) et 95 carreaux » avec explications claires et complètes

3 Réponse correcte et complète avec explications peu claires ou incomplètes

2 Réponse correcte et complète sans explication avec une erreur du nombre des carreaux ou oubli du nombre de carreaux ou réponse des dimensions avec une erreur et réponse 95 pour les carreaux

1 Début de recherche

0 Incompréhension du problème

Catégories : 9, 10

Origine : GTGP