

☞ Baccalauréat - A. O. F. Antilles Guyane juin 1951 ☞

SÉRIE MATHÉMATIQUES

I

1^{er} sujet

Formules de transformation en produit de la somme ou de la différence de deux sinus ou de deux cosinus.

Application - Transformer en produit l'expression $\sin x + \cos y$.

2^e sujet

Résoudre un triangle, connaissant deux de ses côtés et l'angle compris entre ces deux côtés.

Application - Les côtés ont pour longueurs respectives 2,3 et 2,7. L'angle est égal à 38° .

2^e sujet

Résoudre et discuter l'équation suivante :

$$\cos x + \sqrt{3} \sin x = m,$$

où x est un angle compris entre 0 et 4π et où m est un nombre algébrique donné. Interprétation graphique.

II

On considère une ellipse (CE) d'excentricité e , de foyer F et de directrice associée. (D). On désignera par a le demi grand axe, par b le demi petit axe, par c la demi-distance focale de cette ellipse. H sera la projection orthogonale de F sur (D).

1. On définit chaque point M de l'ellipse par l'angle $\theta = (\overrightarrow{FH}, \overrightarrow{FM})$ et par la longueur $r = FM$.

Exprimer r en fonction de e , de θ et du demi grand axe a de l'ellipse.

2. FM coupe la directrice (D) en un point I et recoupe l'ellipse en un point N.

Montrer que la somme $\frac{1}{FM} + \frac{1}{FN}$ garde une valeur constante, qu'on calculera en fonction de a et de b , lorsque M décrit l'ellipse.

On considère les cercles de diamètre MN et de diamètre FI. Que peut-on dire de ces deux cercles?

Comment se transforment-ils dans une inversion de pôle F et de puissance \overline{FH}^2 ?

Déterminer le centre et calculer le rayon du cercle (C') inverse du cercle (C) de diamètre MN.

Quel est le lieu du centre de (C') lorsque M décrit l'ellipse E?

3. À chaque point M de l'ellipse on fait correspondre le point M' du cercle principal situé du même côté que M par rapport au grand axe sur la perpendiculaire menée de M à ce grand axe. O désignant le centre de l'ellipse, on pose

$$\alpha = (\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OM'}).$$

Trouver la relation qui lie α et θ (on pourra, par exemple, écrire l'égalité vectorielle $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FM} + \overrightarrow{MM'}$ et projeter sur l'axe OH).

Montrer que cette égalité peut se mettre sous la forme

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$$

Rendre cette dernière expression de $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ calculable par logarithmes en posant $e = \cos \varphi$.

Remarque - La troisième question est indépendante de la seconde.