

∞ **Baccalauréat A. E. F. et Maroc juin 1954** ∞
Série mathématiques

I.

1^{er} sujet

Représentation d'une droite par une équation du premier degré.

I.

2^e sujet

Variations de la fonction

$$y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 3}.$$

Représentation graphique. Asymptotes. Position de la courbe par rapport à ces asymptotes.

I.

3^e sujet

Progressions géométriques. Définition.

Somme des n premiers termes.

Cette somme a-t-elle une limite quand n augmente indéfiniment?

II.

Partie A.

1. Construire les cercles passant par deux points donnés et tangents à un cercle donné (aucune discussion n'est demandée).
2. En déduire la construction des cercles tangents une droite donnée en un point donné de cette droite et tangents en outre à un cercle donné.

Partie B.

On donne trois points fixes, A, A', F , distincts et alignés dans un ordre arbitraire. On appelle (C) le cercle de diamètre AA' , O son centre, D la polaire de F par rapport à (C), I l'intersection des droites AA' et D .

P étant un point quelconque de D , construire les cercles γ_1 et γ_2 tangents en F à PF et tangents en outre au cercle (C) aux points K_1 et K_2 .

1. Montrer que le cercle de diamètre PF passe par les points de contact K_1 et K_2 .
2. PK_1 et PK_2 recouper respectivement γ_1 et γ_2 en M_1 et M_2 . Montrer que PM_1 et PM_2 sont vus de F sous des angles droits et que, lorsque P varie sur D , M_1 et M_2 décrivent une même conique.
Préciser les sommets de l'axe focal de cette conique et ses tangentes en M_1 et M_2 .
3. M_1M_2 coupe D en Q ; montrer que le cercle de diamètre M_1M_2 est orthogonal au cercle de diamètre FQ (on pourra utiliser l'inversion de pôle P , de module \overline{PF}^2).
En déduire que IF est bissectrice de M_1IM_2 .

Partie C.

On considère une droite fixe, D , un point fixe, F , projeté en I sur D et un point quelconque M de leur plan.

Dans une inversion de pôle F , de module λ arbitraire, le cercle γ de diamètre MF est transformé en une droite γ' .

Soient I' et M' les inverses de I et M , H la projection de M sur D , K' la projection de I' sur γ' . Montrer que les triangles FIM et $FM'I'$ sont semblables, ainsi que les triangles HIM et $K'M'I'$.

En déduire que, si le rapport $\frac{MF}{MH}$ a une valeur fixe lorsque M varie, γ' reste tangent à un cercle fixe.

En conclure que γ est aussi tangent à un cercle fixe et montrer que D est la polaire de F par rapport à ce dernier cercle.

Partie D.

Réciproquement, on donne un cercle fixe (C) , de centre O , et un point fixe F . Soient D la polaire de F par rapport à (C) , I la projection de F sur D . On considère un cercle variable γ passant par F et tangent à (C) en K .

On effectue l'inversion de pôle F qui conserve le cercle (C) . Que devient le cercle γ ?

Montrer que I est l'inverse de O .

Désignant par H la projection sur D du point M de γ diamétralement opposé à F , par K' et M' les inverses respectifs de K et M , démontrer que les triangles FMI et FOM' sont semblables, ainsi que les triangles MIH et $OM'K'$.

En déduire que le rapport $\frac{MH}{MF}$ est indépendant du cercle γ .

N. B. - Les parties C et D sont indépendantes de A et B.