Concours ADVANCE ESME–EPITA–IPSA 2 mai 2015

2 mai 2015 Calculatrice interdite

ÉPREUVE DE MATHEMATIQUES

- L'épreuve de Mathématiques se déroule sur 1 h 30 et est constituée de 6 questions obligatoires et de 6 questions à choisir parmi les questions numérotées de 7 à 14.
- Chaque question comporte cinq propositions : A, B, C, D, E.
- Pour chaque question :
  — Vous cochez la (ou les) case(s) V de la fiche optique correspondant à toute proposition que vous jugez vraie.
  — Vous cochez la (ou les) case(s) F de la fiche optique correspondant à toute proposition que vous jugez fausse.
  — Les cinq propositions peuvent être toutes vraies ou toutes fausses
- Toute case correctement remplie entraîne une bonification. Toute erreur est pénalisée.

Il est donc préféré une absence de réponse à une réponse inexacte.

Questions obligatoires

1.

A. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3-2x-1}{x-3} = 0$

B. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x} = 0$

C. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\cos x}{x} = 0$

D. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

E. $\lim\limits_{x\to +\infty} x\mathrm{e}^{-x} = +\infty$

1. Soit f une fonction numérique de la forme $f(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{x+2}$ où $(a,\,b,\,c) \in \mathbb{R}^3$, définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ dont le tableau de variations est :

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$			0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

alors :

A. $f(-2) = -3$

B. $a > 0$

C. $f(0) > 0$

D. $c > 0$

E. $b^2 - 4ac > 0$

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$, alors :

A. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2}{\mathrm{e}^x + 1}$

B. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

C. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

D. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) < 0$

E. $f'(0) = 1$

4. Soit pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(x^2 + 1\right) - x$ alors :

A. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1} - 1$

A. f est décroissante sur $\mathbb{R}$

C. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

D. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

E. Il existe un unique a de $\mathbb{R}$ tel que $f(a) = 0$

5. Pour tous réels non nuls a, b, c et d on a :

A. Si $a < b$ alors $a^2 < b^2$

A. Si $a^2 < b^2$ alors $a < b$

C. Si $a < b$ et $c < d$ alors $ac < bd$

D. Si $a < 0 < b$ alors $\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$

E. Si $ac < bd$ alors $\dfrac{c}{b} < \dfrac{d}{a}$

6.

A. « Il existe $x \in \mathbb{R}$, il existe $y \in \mathbb{R} \quad x < y$ » est une proposition vraie

B. « Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $y \in \mathbb{R} \quad x < y$ » est une proposition vraie

C. « Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $y \in \mathbb{R} \quad x < y$ » est une proposition vraie

D. « Il existe $x \in \mathbb{R}$, pour tout $y \in \mathbb{R} \quad x < y$ » est une proposition vraie

E. « Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $y \in \mathbb{R} \quad x < y$ » est équivalent à « il existe $x \in \mathbb{R}$, pour tout $y \in \mathbb{R} \quad x < y$ »

Questions à choisir

7. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0)=0$ et $f(1)=4$. On pose g la fonction définie par $g(x)=f\left(x+\dfrac{1}{2}\right)-f(x)-2$. Alors :

A. g est continue sur $\mathbb{R}$

B. $g(0)<0$

C. $g(0)g\left(\dfrac{1}{2}\right)\leqslant 0$

D. Il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que $f\left(c+\dfrac{1}{2}\right)-f(c)=2$

E. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=4x$

8. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=4\cos^2(x)-3$.

Alors :

A. Il suffit d'étudier f sur $[0\,;\,\pi]$

B. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x-\pi)=f(x)$

C. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x)=-4\sin(2x)$.

D. f est décroissante sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$

E. f est décroissante sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,0\right]$

9. Pour toute suite réelle (u_n) on a

A. Si $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$ alors $u_n=1$ à partir d'un certain rang

B. Si $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\dfrac{1}{2}$ alors $u_n\geqslant 0$ à partir d'un certain rang

C. Si pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n>0$ et (u_n) converge alors $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n>0$.

D. Si (u_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

E. Si (u_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

10.

A. $\displaystyle\int_{-18}^{18}(x^2+1)\,\mathrm{d}x=0$

B. $\displaystyle\int_{-5}^{5}\left(x^3+x\right)^{15}\,\mathrm{d}x=0$

C. $\displaystyle\int_0^1\frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\ln 2$

D. $\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x=1-\frac{1}{4}$.

E. $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=\ln\sqrt{2}$

11. Un facteur doit distribuer 3 lettres adressées à 3 destinataires distincts. Étant totalement ivre, il dépose une lettre au hasard dans chaque boîte. Alors la probabilité

A. que chaque lettre arrive à son destinataire est $\dfrac{1}{3}$

B. qu'exactement une lettre arrive au bon destinataire est $\frac{1}{3}$

C. qu'au moins une lettre arrive au bon destinataire est $\frac{1}{2}$.

D. qu'aucune lettre n'arrive au bon destinataire est $\frac{1}{3}$

E. qu'exactement 2 lettres arrivent à leur destinataire est 0

12. Dans une classe, 75 % des étudiants ont préparé l'examen. Un étudiant n'ayant pas préparé l'examen le réussit avec une probabilité 0,2, tandis qu'un étudiant l'ayant préparé réussit avec une probabilité 0,9. Alors la probabilité

A. qu'un étudiant ne prépare pas l'examen et réussisse est 0,8

B. qu'un étudiant réussisse l'examen est 0,725

C. qu'un étudiant n'a pas préparé l'examen sachant qu'il a réussi est 0,25

D. qu'un étudiant échoue à l'examen est 0,275

E. qu'un étudiant prépare l'examen et échoue est 0,075

13. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,5u_n + 1$.

On considère les deux algorithmes suivants :

	Algo1	Algo2
Variables	n et k entiers naturels, u réel	i et r entiers naturels, u réel
Initialisation	$u \leftarrow 0$	$u \leftarrow 0$, $i \leftarrow 0$
Entrée	saisir k	saisir r
Traitement	Pour n variant de 1 à k	Tant que $u < 2 - 10^{-r}$
	$u \leftarrow 0,5u + 1$	$u \leftarrow 0,5u + 1$
		$i \leftarrow i + 1$
	Fin Pour	Fin Tant que
Sortie	Afficher u	Afficher i

A. L'algo1 calcule le terme u_k de la suite (u_n)

B. Pour $k = 3$ l'algo1 affiche $1,75$

C. L'algo2 affiche le terme u_n tel que $u_n \geqslant 2 - 10^{-r}$

D. L'algo2 s'arrête parce que (u_n) est majorée par 2

E. Après avoir déroulé l'algo2, si on prend $k = i$ dans l'algo1 alors la valeur affichée de l'algo1 vérifie $u \geqslant 2 - 10^{-r}$

14. On veut construire un algorithme permettant de trouver une valeur approchée à 10^{-2} près de la solution de l'équation $x^5 - 4x^3 + 2 = 0$ appartenant à $[0\,;1]$.

L'algorithme se présente ainsi :

Variables	a, b réels
Initialisation	$a \leftarrow 0$, $b \leftarrow 1$
Traitement	Tant que condition1
	Si $\left(\frac{a+b}{2}\right)^5 - 4\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + 2 > 0$ alors
	affectation 1
	Sinon
	affectation2
	Fin Si
	Fin Tant que
Sortie	Afficher a et b

A. La condition1 est $b - a < 10^{-2}$

B. L'affectation1 est $b \leftarrow \frac{a+b}{2}$

C. L'affectation1 et l'affectation2 sont les mêmes

D. L'algorithme affiche le résultat au bout de 6 itérations

E. Les valeurs affichées peuvent avoir, a priori, leur premier chiffre après la virgule différent.

CORRIGÉ DU SUJET OFFICIEL DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Numéro de la question	Réponses				
1	F	F	V	F	F
2	F	V	V	V	F
3	V	F	V	F	F
4	F	V	V	V	V
5	F	F	F	F	F
6	V	F	V	F	F
7	V	F	V	V	F
8	V	V	V	V	F
9	F	V	F	F	V
10	F	V	F	F	F
11	F	F	F	V	V
12	F	V	F	V	V
13	V	V	F	F	V
14	F	F	F	F	V