APMEP – Caen 2005
Compte-rendu de l'atelier ADa2 du dimanche 23 octobre 2005

Tracés avec la corde à 13 nœuds (12 intervalles)

Présentation de l'auteur

Robert VINCENT, ingénieur ETP, expert judiciaire honoraire, s'est spécialisé dans la géométrie du nombre d'or. Il est l'auteur de cinq ouvrages.

Aux Éditions Chalagam (Tél.04 91 55 66 77; fax : 04 90 55 66 21)
- Géométrie du Nombre d'or (1999) - tiré à ce jour en 27 000 exemplaires
- Nombre d'or et Créativité (2001)

Aux Éditions Archimède (Tél. 01 39 98 83 50; fax : 01 39 98 83 52)
- Activités géométriques autour des polygones et du nombre d'or, Tomes I, II (2003)
- Activités géométriques autour des polygones et du nombre d'or, Tome III (2004)

Depuis 1998, Robert VINCENT est intervenu plus d'une centaine de fois dans les collèges et lycées de France pour animer des séances d'activités géométriques comportant des tracés géométriques simples, sans calcul, et le coloriage.

Son e-mail : rjm.vincent@tiscali.fr

Sommaire de l'atelier ADa2

I. Généralités sur la corde à nœuds

Utilisée depuis la plus haute Antiquité, notamment par les Égyptiens, les Grecs et les Romains, la **corde à nœuds** a servi à tracer et à mesurer les constructions d'édifices. Cette corde a été à nouveau utilisée par les bâtisseurs romans, du 10^{e} au 13^{e} siècle, et actuellement, au 21^{e} siècle, pour la construction du Château de Guénelon en Bourgogne.

Les bâtisseurs romans, forts de cet héritage[1], avaient, eux aussi, des connaissances mathématiques transmises par les œuvres des anciens tels que Euclide, Thalès, Pythagore, Platon, Archimède et Vitruve. Cela leur a permis de faire des tracés géométriques ***sans calcul*** permettant l'édification des édifices romans qui font encore de nos jours l'admiration de tous.

---

[1] Bernard de Chartres, écolâtre, disait : « Nous sommes des Nains juchés sur des épaules de géants. Nous voyons ainsi davantage et plus loin qu'eux : non pas parce que notre vue est plus aiguë ou notre taille plus haute, mais parce qu'ils nous portent en l'air et nous élèvent de toute leur hauteur gigantesque. »

La **corde à 13 nœuds (12 intervalles)** est une corde partagée par des nœuds placés à distance égale. Cette distance est appelée la "coudée". Le nombre de nœuds étant de 13, avec un à chaque extrémité, il y a 12 intervalles (12 coudées).
La coudée (lat. cubitus) est une unité de longueur vieille de plusieurs milliers d'années.. La coudée la plus connue est la coudée royale ou égyptienne de valeur 52,36 cm.
On remarque que dans le triangle rectangle de rapport 1:2, appelé équerre 1/2, l'hypoténuse étant la racine carrée de 5, soit 2,236, l'addition des valeurs des côtés donne : 1 + 2 + 2,236 = 5,236. De plus, l'équerre 1/2 permet de faire le partage en moyenne et extrême raison d'un segment et déterminer ainsi la valeur Φ, le nombre d'or.

Pourquoi "douze" ?
C'est la "dynamique de douze". Douze est le nombre de la plénitude et de la perfection.
Les bâtisseurs romans choisirent de compter sur une base de douze (système duodécimal) pour des **raisons religieuses, philosophiques et mathématiques**.

- Une roue de rayon 1 (une unité : 1m, par exemple), donnera un cercle de circonférence = 6,2832. Cette longueur divisée par 12 donne la coudée : $\frac{6,2832}{12} = 0,5236$.
- Le système duodécimal (base 12) est encore utilisé de nos jours. On compte les heures en système duodécimal, comme les 12 mois de l’année, les soixante minutes dans l’heure; dans les pays anglo-saxons, on divise le "pied" en douze "pouces". Il y a douze mois dans l'année et douze signes du zodiaque.
- Les tribus d’Israël et les apôtres sont douze. Le Grand Prêtre offrait douze pains de proposition. Les restes de la multiplication miraculeuse sont recueillis dans douze corbeilles. La prière du « Credo » comporte douze articles. Dans la Bible, on lit : "Puis un grand signe parut dans le Ciel. Une femme revêtue du soleil, la lune sous ses pieds, et sur sa tête une couronne de douze étoiles."
- Parmi les corps platoniciens, on constate que le dodécaèdre est constitué de 12 faces pentagonales dont chacune contient de multiples occurrences du nombre d'or. Ce corps lie donc la dynamique de 12 à la dynamique de cinq (le Nombre d'or). De plus, il contient trois rectangles d'or.
- Douze appartient aux dynamiques de 2, 3, 4 et 6 et est lié à la dynamique de 5 dans le dodécaèdre.

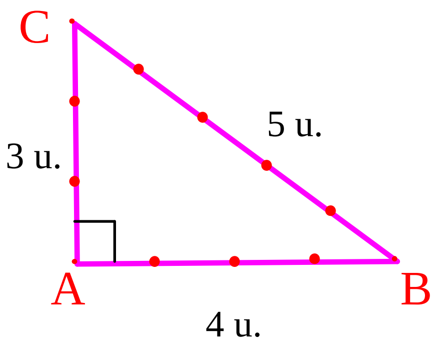
Utilisation de cette corde
La corde à nœuds permet de tracer des droites, des cercles ou des ellipses de rayon donné, de construire des polygones réguliers, de mesurer des distances et d'effectuer ***sans aucun calcul*** toute construction relative à l'utilisation de la règle et du compas. Son utilisation la plus connue est la construction de perpendiculaires au moyen du triangle 3-4-5 (Théorème de Pythagore, connu sous le nom de "Pont aux ânes" par les matheux !).
Elle permet de réaliser le partage en moyenne et extrême raison d’un segment en faisant apparaître le nombre d’or, ϕ, c’est à dire, la proportion $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1,618}{1}$. Cette proportion dite "parfaite"[2] va régir tous les tracés.

---

2 Ce résultat est dû à l’application des règles relatives à la « divine proportion » qui régit les constructions géométriques utilisés pour les tracés régulateur des églises. Aussi, peut-on dire que la géométrie est au service de la spiritualité. La justesse des proportions conduit à l’harmonie des formes et des sons. Cette divine proportion est l’expression utilisée par le moine Luca PACIOLI (XVI° siècle). De nos jours, et ce depuis le XX° siècle cette divine proportion est dénommée « Nombre d’or.

II. Tracés

A. Tracé d'**axes perpendiculaires** au moyen du triangle rectangle 3-4-5.

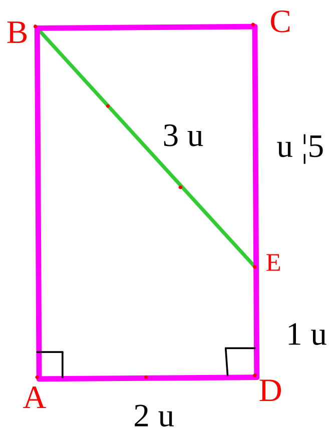


$$CB^2 = AC^2 + AB^2$$

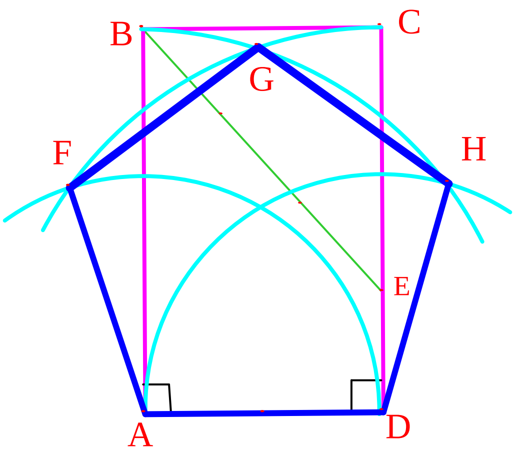
$$5^2 = 3^2 + 4^2$$

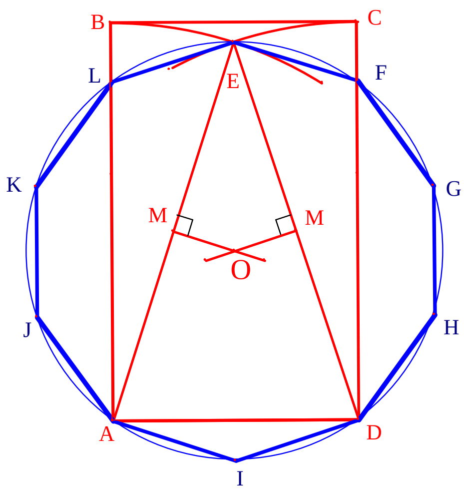
B. Tracé d'un **rectangle d'or** dont on connaît la largeur

$$\frac{CD}{AD} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$$



C. Tracé d'un **pentagone** et d'un **décagone** à partir d'un rectangle d'or





$$\frac{Diagonale}{Côté} = \Phi$$

$$\frac{GD}{AD} = \frac{CD}{AD} = \Phi$$

$$\frac{Rayon}{Côté} = \Phi$$

$$\frac{OE}{EF} = \frac{CD}{AD} = \Phi$$

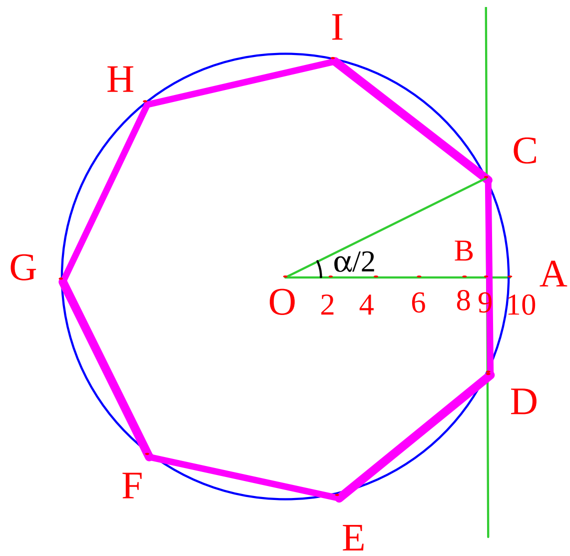
D. Tracé d'un **hexagone régulier** : côté de l'hexagone égal au rayon du cercle circonscrit

E. Tracé d'un **heptagone régulier** inscrit dans un cercle de rayon égal à 10 unités

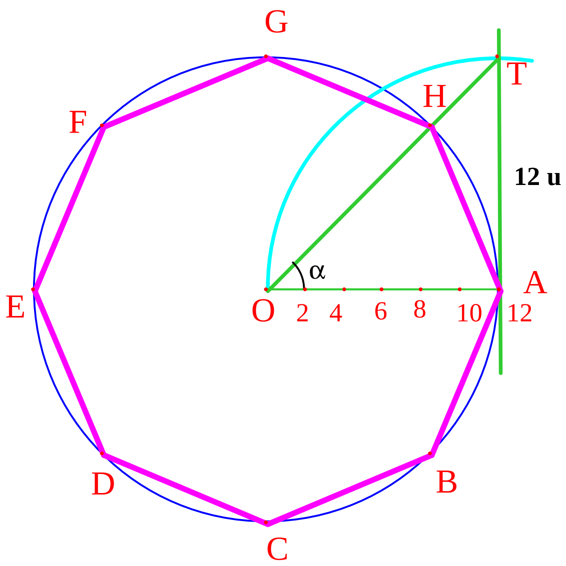
$$\frac{OB}{OC} = \cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{9}{10} = \cos\left(\frac{\frac{360°}{7}}{2}\right)$$

$$\frac{OB}{OC} = 0,900\,; \quad \cos\frac{\alpha}{2} = 0,900$$



F. Tracé d'un **octogone régulier** dans un cercle : rayon = 12 unités et tangente = 12 unités



$$\frac{AT}{OA} = \tan\alpha$$

$$\frac{12}{12} = \tan 45° = 1$$

G. Tracé d'un **ennéagone régulier** dans un cercle : rayon = 12 unités et tangente = 10 unités

(voir tracé ci-dessus) $\quad \dfrac{AT}{OA} = \tan\alpha \;\Rightarrow\; \dfrac{10}{12} = 0,833\,; \quad \tan 40° = 0,839$

H. Tracé d'un **décagone régulier** dans un cercle : rayon = 11 unités et tangente = 8 unités

(voir tracé de l'octogone ci-dessus) $\quad \dfrac{AT}{OA} = \tan\alpha \;\Rightarrow\; \dfrac{8}{11} = 0,727\,; \quad \tan 36° = 0,726$

I. Tracé d'un **dodécagone régulier** dans un cercle : rayon = 7 unités et tangente = 4 unités

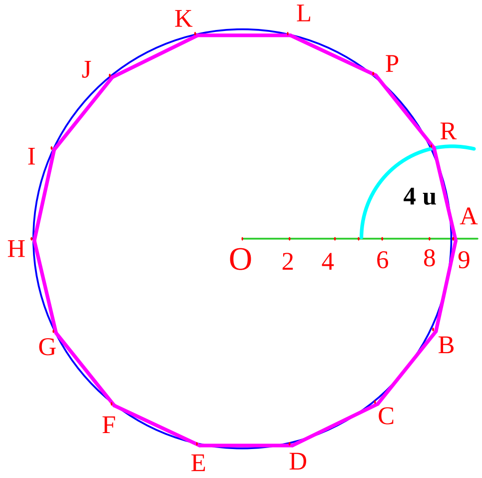
(voir tracé de l'octogone ci-dessus) $\frac{AT}{OA} = \tan\alpha \Rightarrow \frac{4}{7} = 0,571\,;\quad \tan 30° = 0,577$

J. Tracé d'un **tétradécagone régulier** dans un cercle : rayon = 9 unités et côté = 4 unités

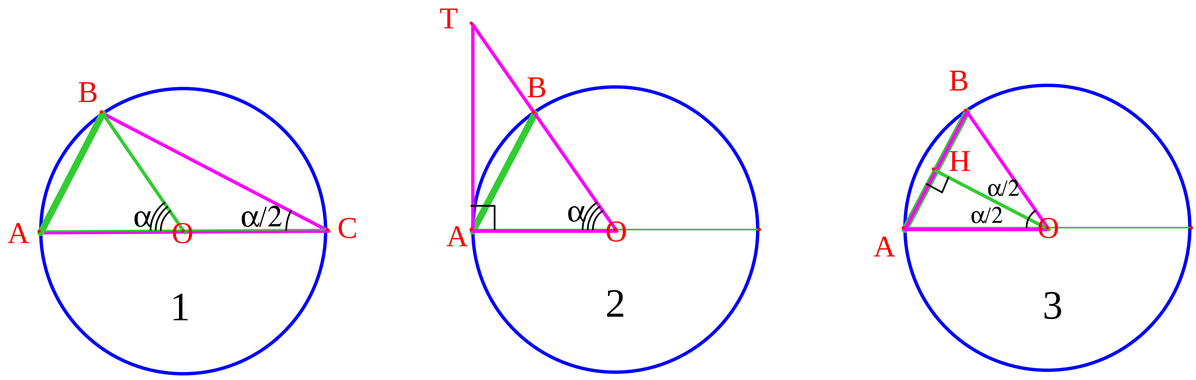
$$\frac{AR}{2\times OA} = \sin\frac{180°}{14}$$

$$\frac{4}{2\times 9} = \sin\frac{180°}{14}$$

$$\frac{AR}{2\times OA} = 0,222\,;\quad \sin\frac{180°}{14} = 0,222$$



K. Trois méthodes de construction des polygones réguliers inscrits dans un cercle



<u>**Première méthode**</u> : $\frac{AB}{AC} = \frac{c}{2R} = \sin\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\pi}{n} \Rightarrow c = 2R\sin\frac{\pi}{n}$ *Tracés D et J*

<u>**Deuxième méthode**</u> : $\frac{AC}{OA} = \frac{x}{R} = \tan\alpha \Rightarrow x = R\tan\alpha$ *Tracés F, G et H*

<u>**Troisième méthode**</u> : $\frac{OH}{OA} = \frac{a}{R} = \cos\frac{\alpha}{2} \Rightarrow a = R\cos\frac{\alpha}{2}$ *Tracé E*

c : côté du polygone – **R** : rayon du cercle circonscrit - **α** : angle au centre du polygone

n : nombre de côtés du polygone régulier - **x** : tangente de l'angle α - **a** : apothème