LES MATHEMATIQUES AU LYCEE AUTOUR DE 1907

J. Laurentin

Centre François Viète

31 mars 2010

L'exemple d'un cahier de problème de sup - 1907/1908

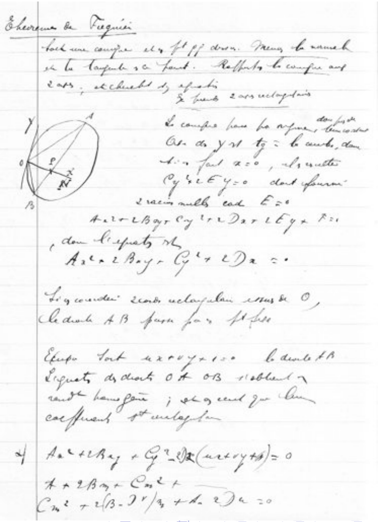


Table des matières

Les critiques des programmes de l'Ecole polytechnique

« J'ose dire que **la marche nouvelle est** non-seulement étrangère, mais **nuisible à l'esprit d'application** qui doit caractériser les études et les travaux de l'ingénieur, quel que soit le corps auquel il se destine. Et, ce qui doit frapper les esprits observateurs, c'est que **l'Ecole polytechnique a cessé de produire des géomètres**, depuis qu'elle a quitté la méthode qu'on aurait pu croire propre qu'à produire de grands ingénieurs. »(Dupin (1830) *Considérations générales sur les applications de la géométrie*)

Une réforme en trois temps

1. **Commission Poinsot (septembre 1845)** : **Poinsot** (X 1794), J.-M. **Duhamel** (X 1814), A. P. **Poulain de Bossay**, (proviseur, Saint-Louis), T. **Cazalis**, (Inspecteur de l'Académie de Paris) et J **Vieille** (spé, Louis le Grand).
2. **Commission mixte de 1850** : Thenard (président), **Le Verrier** (rapporteur), Noizet, **Poncelet**, Mathieu, **Duhamel**, Mary, **Morin**, **Piobert**, **Regnault**, **Olivier**, Debacq. Révision profonde des études préparatoires inspirée par le Rapport de la Faculté des sciences de Paris (1847) rédigé par Jean-Baptiste **Dumas**.
3. **La commission Thenard de 1852** : J-B **Dumas**, **le Verrier**, Bommart, dir. des études à l'X, **Duhamel**, **Morin**, **Piobert** et Michel **Chevalier**.

Une réforme en trois temps

1. **Commission Poinsot (septembre 1845)** : **Poinsot** (X 1794), J.-M. **Duhamel** (X 1814), A. P. **Poulain de Bossay**, (proviseur, Saint-Louis), T. **Cazalis**, (Inspecteur de l'Académie de Paris) et J **Vieille** (spé, Louis le Grand).
2. **Commission mixte de 1850** : Thenard (président), **Le Verrier** (rapporteur), Noizet, **Poncelet**, Mathieu, **Duhamel**, Mary, **Morin**, **Piobert**, **Regnault**, **Olivier**, Debacq. Révision profonde des études préparatoires inspirée par le Rapport de la Faculté des sciences de Paris (1847) rédigé par Jean-Baptiste **Dumas**.
3. **La commission Thenard de 1852** : J-B **Dumas**, **le Verrier**, Bommart, dir. des études à l'X, **Duhamel**, **Morin**, **Piobert** et Michel **Chevalier**.

Une réforme en trois temps

1. **Commission Poinsot (septembre 1845)** : **Poinsot** (X 1794), J.-M. **Duhamel** (X 1814), A. P. **Poulain de Bossay**, (proviseur, Saint-Louis), T. **Cazalis**, (Inspecteur de l'Académie de Paris) et J **Vieille** (spé, Louis le Grand).
2. **Commission mixte de 1850** : Thenard (président), **Le Verrier** (rapporteur), Noizet, **Poncelet**, Mathieu, **Duhamel**, Mary, **Morin**, **Piobert**, **Regnault**, **Olivier**, Debacq. Révision profonde des études préparatoires inspirée par le Rapport de la Faculté des sciences de Paris (1847) rédigé par Jean-Baptiste **Dumas**.
3. **La commission Thenard de 1852** : J-B **Dumas**, **le Verrier**, Bommart, dir. des études à l'X, **Duhamel**, **Morin**, **Piobert** et Michel **Chevalier**.

L'esprit de la réforme au lycée

« Quelques géomètres veulent que l'intelligence des élèves soit obligée de déduire toutes les véritées de leurs principes les plus abstraits, et qu'elle s'assouplisse par cette gymnastique qui la rend à la fois plus subtile et plus féconde en ressources pour l'argumentation. **Cette méthode** réussit à quelques esprits rares ; mais elle **décourage le plus grand nombre** ; elle inspire un orgueil d'autant plus dangereux à ceux qu'elle n'arrête pas, qu'elle **les frappe presque toujours de stérilité sous le rapport de l'invention** ; »

L'esprit de la réforme au lycée

« **Le professeur doit s'interdir l'usage des exemples abstraits** et celui des problèmes dans lequels les données, prises au hasard, n'ont aucun rapport avec la réalité. Ces problèmes, qu'on peut poser en nombre indéfini, et sans étude préalable, n'ont d'autre avantage que de permettre d'aborder la classe sans préparation. **Que les exercices et les exemples proposés aux élèves portent toujours**, et dès les premières leçons, **sur des objets qui se rencontrent dans les arts, dans l'industrie, dans la nature, dans le système du monde, dans la physique**, on y touvera de nombreux avantages. Le sens précis des solutions sera mieux saisi. »

Instructions pour la mise à exécution du plan d'étude des lycées, 15 novembre 1854

Les objections

Olindes Terquem : *Sur l'avenir qu'on prépare à l'enseignement à l'Ecole polytechnique et en France, en général* (Paris, 1850)
« A l'oeuvre, donc. Industrialisons tout l'enseignement. L'utilité matérielle, productive, en tout et partout. Supprimons les mathématiques pures, qui ne donnent satisfaction qu'aux esprits creux, et cet échafaudage de théorèmes qui n'ont jamais fait tourner une roue. Eloignons ces rébarbatives formules, qu'en vertu de notre pleine science autocratique nous déclarons à tout jamais inapplicables. Ne faisons manier aux élèves que la règle et le compas. »

Le programme des classes de « spéciale »

Géométrie & algèbre

- Angles polyèdres, figures symétriques, géométrie sphèrique.
- Notions sur les nombres incommensurables.
- Division des polynômes. Exposants fractionnaires - exposants incommensurables - exposants négatifs.
- Séries numériques : [Nouveau] Série géométrique, série harmonique, exples de séries non abs. convergentes. Formule du binôme. Application au calul de la « limite vers laquelle tend $(1+\frac{1}{m})^m$ quand m croît au delà de toute limite ».
  « Les séries se rencontrent sans cesse dans la pratique ; elles donnent les solutions les plus avantageuses de beaucoup de questions et il est indispensable qu'on sache dans quelles circonstances on peut en faire un emploi sûr. »

Le programme des classes de « spéciale »

Algèbre III

- Des fonctions dérivées : [*Nouveau*] Développements limités. Définition et propriétés de la dérivée « d'une fonction quelconque ». Dérivées usuelle, en particulier les fonctions circulaires directes et inverses, exponentielles et logarithmiques.
- Dével. en S.E. de $ln(1+x)$ et de $arctan(x)$ [*Nouveau*].
- Application au calcul des logarithmes et à celui du « rapport de la circonférence au diamètre d'après la série $Arctan(x)$: »

$$\frac{\pi}{4} = arctan\frac{1}{2} + arctan\frac{1}{3},\ \frac{\pi}{4} = 2arctan\frac{1}{3} + arctan\frac{1}{7} \text{ et}$$
$$\frac{\pi}{4} = 4arctan\frac{1}{5} - arctan\frac{1}{239}$$

Le programme des classes de « spéciale »

Algèbre IV

- Théorie des équations : Théorème de Cauchy [(*Théorème des valeurs intermédiaires*].
- Une équation algébrique de degré impair a au moins une racine réelle, racines polynômiales.
- Méthode d'interpolation de Newton : approche algorithmique et graphique [*Nouveau*].
- Décomposition en éléments simples [*Nouveau*]

Le programme des classes de « spéciale »

Géométrie analytique

- Des coordonnées rectilignes, des équations du premier et du deuxième degé à deux variables ; Du centre, des diamètre et des axes dans les courbes du second degré, Réduction de l'équation par changement de coordonnées ; des tangentes et des asymptotes.
- Etude particulières de l'ellipse, l'hyperbole et la parabole ;
- des coordonnées polaires.
- Intersection de deux courbes du second degré, des sections coniques et cylindriques.
- Théorie des projections, des coordonnées rectilignes, de la ligne droite et du plan.

Le programme des classes de « spéciale »

Mécanique et géométrie descriptive

- Mécanique [*nouveau*] : Du mouvement du point considéré géométriquement. De l'effet des forces appliquées à un point matériel libre, du travail des forces appliquées à un point mobile ; Des forces appliquées à un corps solide. Des machines.
- Géométrie descriptive : « Le programme de géométrie descriptive est demeuré tel qu'il a été depuis longtemps établi par Monge. L'étendu que ce célèbre géomètre lui avait donné, ainsi que les méthodes qu'il avait créées, ont été maintenues. »

La réforme de Victor Duruy (1811-1894) de 1863-65

- 1864 : Abolition du régime de la bifurcation.
  Développement de l'enseignement professionnel : création de l'enseignement *spécial* ;
  « Jeter un pont sur l'abîme qui sépare 44000 élèves de 5 millions d'enfants »...
- Création de cours préparatoires aux mathématiques élémentaires à l'issue de la classe de 3ième.

La réforme de Victor Duruy (1811-1894) de 1863-65

- 1864 : Abolition du régime de la bifurcation.
  Développement de l'enseignement professionnel : création de l'enseignement *spécial* ;
  « Jeter un pont sur l'abîme qui sépare 44000 élèves de 5 millions d'enfants »...
- Création de cours préparatoires aux mathématiques élémentaires à l'issue de la classe de 3ième.

La réforme de 1880-1885

Premier retour en arrière

Plaintes des enseignants de sciences sur la lourdeur des programmes.
22 janvier 1885 : Une commission d'enseignants, présidée par J.-B. Charles **Vacquant** (I.G. de mathématiques, professeur à Saint-Louis) est chargée de mettre en place la réduction d'horaires.
Pour les maths, elle se compose d'H. **Bernès** (L. le Grand), N. D. **Piéron** (spé à Saint-Louis), **Berthaud** (lycée Condorcet) et E. C. **Combette** (Saint-Louis, examinateur d'admission à l'Ecole Centrale des arts et manufactures).
Les cours de physique et de sciences naturelles sont les plus touchés.

« L'enseignement des sciences physiques et naturelles, même réduit aux proportions modestes que lui ont assignées le programme, intéresse vivement les élèves des classes élémentaires. [...] Ces études sommaires sont relativement faciles ; il ne faudrait pas que, par leur attrait même, elles fussent un obstacle à la culture littéraire, plus délicate sans doute, plus intime, mais un peu aride à ses débuts, et dont le haut intérêt ne se révèle que par un long exercice. **Veillez donc à ce que la partie littéraire et même grammaticale de notre enseignement élémentaire ne soit point masquée et offusquée par un développement exagéré de l'élément scientifique**. »

(Lettre adressée aux Recteurs, le 4 novembre 1882, par Ministre de l'Instruction publique J. Duvaux)

La réforme de 1890

Un second pas plus franc

- *L'esprit* : Promouvoir « une éducation intégrale et harmonieuse de l'homme »et pour cela ne retenir que « les savoirs les plus utiles par leur vertu éducative et comme discipline de l'esprit »
- *Conséquences* : Horaires de sciences réduits, programmes allégés, **contenu réduits au strict nécessaire à la formation de l'honnête homme**.
- La filière « lettres-mathématiques »aux programmes réduits impose d'être précédée d'une année de rhétorique. Création d'une filière moderne.

La réforme de 1890

Un second pas plus franc

- *L'esprit* : Promouvoir « une éducation intégrale et harmonieuse de l'homme »et pour cela ne retenir que « les savoirs les plus utiles par leur vertu éducative et comme discipline de l'esprit »
- *Conséquences* : Horaires de sciences réduits, programmes allégés, **contenu réduits au strict nécessaire à la formation de l'honnête homme**.
- La filière « lettres-mathématiques »aux programmes réduits impose d'être précédée d'une année de rhétorique. Création d'une filière moderne.

La réforme de 1890

Un second pas plus franc

- *L'esprit* : Promouvoir « une éducation intégrale et harmonieuse de l'homme »et pour cela ne retenir que « les savoirs les plus utiles par leur vertu éducative et comme discipline de l'esprit »
- *Conséquences* : Horaires de sciences réduits, programmes allégés, **contenu réduits au strict nécessaire à la formation de l'honnête homme**.
- La filière « lettres-mathématiques »aux programmes réduits impose d'être précédée d'une année de rhétorique. Création d'une filière moderne.

organisation des études

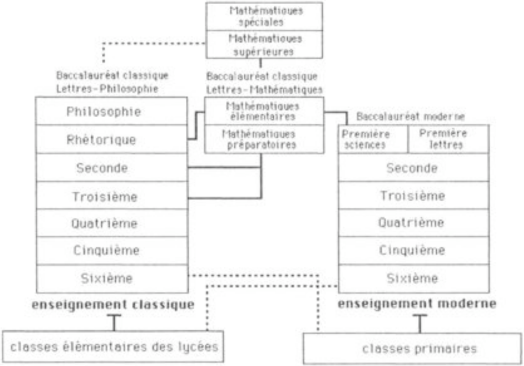


Fig. 1. — Organisation de l'enseignement secondaire à la fin du XIXe siècle

Table des matières

Les initiateurs

- En premier lieu Gaston **Darboux** : Dès 1898, il publie sous sa direction un *Cours complet de mathématiques élémentaire* qui trace les grandes lignes de la réforme de 1902.
- Il s'entoure de proches, anciens de l'E.N.S. :
  - *Leçons d'Arithmétique théorique et pratique* : Jules **Tannery**.
  - *Traité d'algèbre élémentaire* : M. de **Campou**, ancien élève de l'ENS, professeur au collège de Rollin.
  - *Cours d'algèbre de mathématiques spéciales* : B. **Niewenglowski**, ancien élève de l'ENS, inspecteur de l'Académie de Paris.
  - *Leçons de géométrie élémentaire* (géométrie plane) : Jacques **Hadamard**, maître de conférence à la Faculté des sciences de Paris, professeur suppléant au Collège de France.

La sous-commission chargée des mathématiques

Presque exclusivement des universitaires, mathématiciens réputés :

- Paul **Appel**, Faculté des sciences de Paris, mbre de l'Institut.
- Ernest-Adolphe **Bichat**, doyen de la faculté des sciences de Nancy, membre du Conseil Supérieur de l'Instruction Publique.
- Amédée **Combe**, ancien professeur de mathématiques, censeur du lycée Charlemagne.
- Gabriel **Koenigs**, professeur à la faculté des sciences de Paris.
- Paul **Mathieu**, professeur au lycée Louis-le-Grand, membre du Conseil Supérieur de l'Instruction Publique.
- Jules **Prévost**, inspecteur général, à la retraite depuis 1903.
- Jules **Tannery**, maître de conférence à l'Ecole normale supérieure, membre du CSIP.

Un contexte positiviste

Comme l'écrit Louis Liard (1846-1917), il s'agit :
« de travailler, avec les moyens les mieux adaptés, à la culture de tout ce qui, dans l'esprit, sert à **découvrir et à comprendre la vérité positive**, observation, comparaison, classification, expérience, **induction**, déduction, analogie, d'éveiller et de **développer ce sens des réalités et des possibles** qui n'importe pas moins que l'esprit d'idéal. »[L. Liard, *Les sciences dans l'enseignement secondaire* Conférences au Musée pédagogique, 1904]

Conférences à l'Université pédagogique - 1904

Emile Borel : *Les exercices pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire*

« On doit [...] initier peu à peu les élèves aux procédés les plus simples de calcul approché, mais d'une manière expérimentale ; on leur fera calculer, par exemple, le développement de leur bicyclette en prenant successivement $\pi = \frac{22}{7}$, $\pi = 3,14$, $\pi = 3,141$, $\pi = 3,1416$, $\pi = 3,14159$, $\pi = 3,141592$ et on leur fera comparer les divers résultats avec celui que donne une mesure directe.
De plus, [...] l'essentiel est que la tâche du calculateur soit simplifiée le plus possible, afin qu'arrivant sans beaucoup de peine au résultat, le plaisir d'être arrivé ne soit pas gâté par les ennuis d'une trop longue route ».
Réclame la création de « laboratoires de mathématiques »

Conférences à l'Université pédagogique - 1904

- Emile Borel recommande que « l'enseignement de la Géométrie et celui du dessin géométrique ne doivent pas constituer deux enseignements distincts, pas plus que le cours de Physique et les manipulations ».
- Henri Poincaré, dans *Les définitions générales en mathématiques*, réclame qu'une « définition soit préparée par des exemples concrets », voire « par des expériences ».
- Hadamard, dans sa conclusion aux interventions d'H. Poincaré et E. Borel, insiste :
  « En traitant la géométrie comme une science physique - ce qu'elle est véritablement -, on fera disparaître ce que son enseignement a présenté jusqu'ici d'artificiel et de rebutant »

Organisation des études

Mise en place de « nouvelles humanités scientifiques »formatrices de l'esprit dans la même mesure que les humanités classiques.

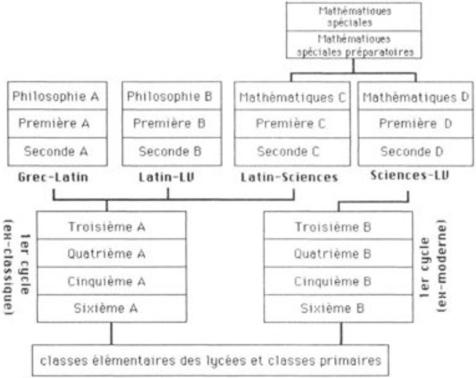


Fig. 5. — Organisation de l'enseignement secondaire selon la réforme de 1902

La critique au lycée

Oeuvre essentiellement d'universitaires, la réforme irrite de nombreux enseignants qui demandent des aménagements, à savoir :

- Un cours plus concret dans le premier cycle (actuel collège)
- Introduction des vecteurs au sein du cours de géométrie et pas seulement dans le chapitre de mécanique.
- réduction des attendus en géométrie dans l'espace.

L'arrêté de juillet 1905 leur donne satisfaction.

Table des matières

Algèbre

- introduction des nombres positifs et négatifs.
- monômes, polynômes : addition, soustraction, multiplication et division des monômes et des polynômes.
- Equations du premier degré à une ou deux inconnues ; systèmes d'équations du premier degré.
- Equations du second degré à une inconnue (« On ne développera pas la théorie des imaginaires »).
- Progressions arithmétiques et géométriques.
- Logarithmes vulgaires.

Le programme de la classe de mathématiques (C et D)

- Coordonnées d'un point. Représentation d'une droite. Coefficient angulaire d'une droite.
- Variations et représentations graphiques des fonctions :
$$y = ax + b,\ y = \frac{ax+b}{a'x+b'},\ y = ax^2 + bx + c,$$
$$y = ax^4 + bx^2 + c$$
- Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, de la racine carrée d'une fonction, de *sinx*, *cosx*, *tanx* et *cotanx*
- Application à l'étude de la varation, à la recherche de maxima ou des minimas de quelques fonctions simples.
- Dérivée de l'aire d'une courbe regardée commme une fonction de l'abscisse.

Poincaré, Musée pédagogique, 1904

« Pour définir une intégrale, nous prenons toutes sortes de précautions ; nous distinguons les fonctions continues et celles qui sont discontinues [...] **Tout cela à sa place dans l'enseignement des Facultés ; tout cela serait détestable dans les lycées**. [...] Alors ce qui reste à faire est bien simple : définir l'intégrale comme l'aire comprise entre l'axe des x, deux ordonnées et la courbe, montrer que quand l'une des ordonnées se déplace, la dérivée de cette aire est précisément l'ordonnée elle-même. C'est le raisonnement de Newton, c'est comme cela que le calcul intégral est né, et bon gré mal gré, il faut repasser par où nos pères ont passé. »

Géométrie

- Le chapitre sur les coniques n'est pas modifié.
- La nouveauté porte sur l'étude des transformations : translation, rotation, symétries, homothéties et similitudes.

Vacquant et Macé (1907) : « On dit que le déplacement, sur un plan P, d'un plan mobile P_1 et de toute figure F_1, tracée sur ce plan P_1, se fait par **translation**, quand tous les points du plan P_1 se meuvent dans le plan fixe P en décrivant des portions de droite parallèles, de même sens et de même longueur. »

le passage par le mouvement

Vacquant et Macé (1907) « Pour représenter matériellement le déplacement dans son plan d'une figure plane de forme invariable, on peut prendre pour plan fixe P le plan d'une feuille de papier collée sur une planche que l'on maintient fixe, et pour plan mobile P_1 le plan d'une feuille de papier à décalquer sur laquelle on a tracé la figure F_1. On déplace la feuille de papier à décalquer en la maintenant appliquée sur le plan P, et dans chacune des positions du plan P_1, on décalque la figure F_1 sur le plan P ; On obtient ainsi les figures F, F', F'', du plan P sur lesquelles on amène la figure F_1, par les déplacements du plan P_1. »

Géométrie (suite)

- Aires, volumes.
- Puissance d'un point par rapport à un cercle et par rapport à une sphère. Axes radicaux. Plans radicaux. Polaire d'un point par rapport à un cercle (Théorème de Pascal et son dual, le théorème de Brianchon), plan polaire d'un point par rapport à une sphère. Inversion. *Applications* : *Mener un cercle tangent à trois cercles donnés, Théorème de Ptolémée*
  Nombreuses références à Gergonne. La géométrie pratiquée est une géométrie typique, sur le fond comme sur la forme, du premier quart du XIXè siècle.

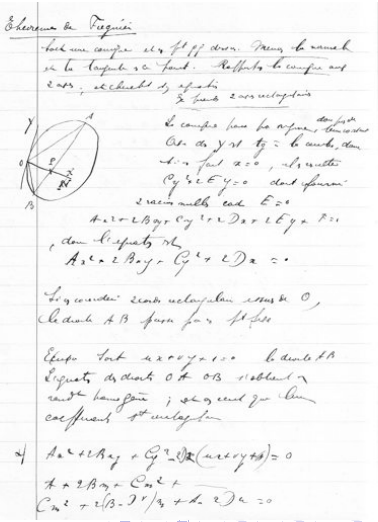
mécanique

- **Cinématique**. Roulements sans glissement d'un cercle sur un autre ou bien sur une ligne droite. Cycloïdes et épicycloïdes - Applications aux engrenages cylindriques - Crémaillères - exemples simples de trains d'engrenages.
- **Statique**. Forces appliquées à un point matériel, à un corps solide. Somme géométrique et moment résultant des forces par rapport à un point. Conditions d'équilibre d'un solide libre. Couples, composition des couples. Forces parallèles - Centre de gravité.
- **Dynamique**. Inertie. Travail des forces appliquées à un point matériel. Machines à l'état de mouvement. Travail moteur et travail résistant. Rendement des machines. Indications sur l'emploi des volants et des freins.

Critique des programmes des classes préparatoires

Louis Liard réunit les professeurs de classe préparatoire (sept. 1902). Les critiques sont les suivantes :
« Le programme comprend de l'algèbre, de la géométrie analytique et de la mécanique. L'algèbre y est sacrifié ; **la géométrie analytique y est trop développée** (« c'est le triomphe de la mémoire et du mécanisme stérile ») ; **la mécanique y est altérée** [...] **dénaturée** [...] **on en a fait un enseignement à peu près exclusivement théorique**, oubliant qu'elle est une science expérimentale, que ses vérités n'ont rien d'absolu et qu'elle n'est que le premier et le plus bel exemple de l'application des mathématiques à l'expérience ». »

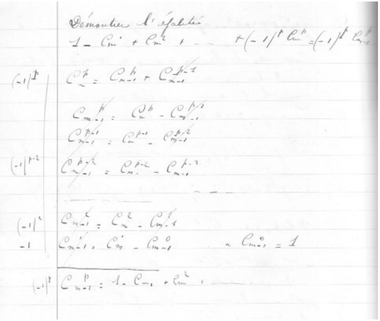
L'exemple concret du cahier de Rodrigues - 1907/1908



Le cahier de Rodrigues 1907/08

combinatoire

- Somme de $1 \times 2 + 3 \times 4 + \ldots + 99 \times 100$
- Démontrer $C_{m+n}^{p} = C_m^p + C_m^{p-1} C_n^1 + \ldots + C_m^1 C_n^{p-1} + C_n^p$.
- Calculer $S = \sum_{k=0}^{m} \left(C_m^k \right)^2$

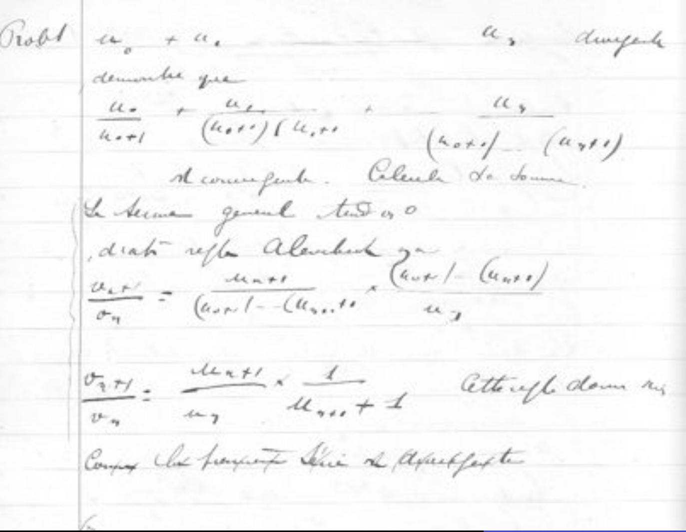


Séries numériques

- Soit la série
$$1+\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{n.3^{n-1}}.$$
Limite et somme à $1/100$ près.

« On fera de nombreuses applications numériques et l'on donnera aux élèves l'idée du plus ou moins de rapidité de la convergence en leur faisant calculer une limite de l'erreur commise quand on prend un nombre déterminé de termes »

Séries numériques



Probl $u_0 + u_1 \dots u_n$ divergente
démontrer que
$$\frac{u_0}{u_0+1} + \frac{u_1}{(u_0+1)(u_1+1)} + \dots \frac{u_n}{(u_0+1)\dots(u_n+1)}$$
est convergente. Calculer la somme.
Le terme général tend vers 0
d'après règle d'Alembert on a
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1}}{(u_0+1)\dots(u_{n+1}+1)} \times \frac{(u_0+1)\dots(u_n+1)}{u_n}$$
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1}}{u_n} \times \frac{1}{u_{n+1}+1}$$ Cette règle donne rien
Comparer

analyse - limites et continuité

- si a, b ont même limite, a^m et b^m également.
- Trouver, pour $x = 0$ la valeur limite de $y = (tgx/x)^{\frac{1}{x^2}}$
- Continuité de $y = x^x$
- Limite de $y = \dfrac{tgx - tga}{x - a}$ quand x tend vers a.

« On s'abstiendra de toute complication pour la notion de continuité ; on n'envisagera que des fonctions continues ayant une dérivée. On emploiera, partout où il sera possible, les représentations graphiques. »

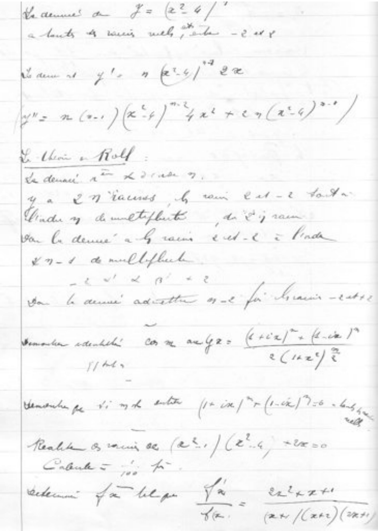
analyse - dérivation

- Dérivée n-ième de $y = e^{-x^2}$
- Dérivée de $y = Arcsin\left(a\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-a^2}\right)$. Expliquer.
- Trouver l'ordre infinitésimal de $y = e^x - 1 - x - \dfrac{x}{1} - \dfrac{x^2}{2!}$
- On donne $x^3y^5 = 8$. Trouver le minimum de $4x^2 + 3y^4$
- Trouver $f(x)$ telle que : $f(a+b) = f(a) \times f(b)$

« **Signification géométrique** de la dérivée, du signe de la dérivée seconde, du théorème des accroissements finis, du théorème de Rolle ; relations qui existent entres les courbes représentatives d'une fonction et de ses dérivées première et seconde. »

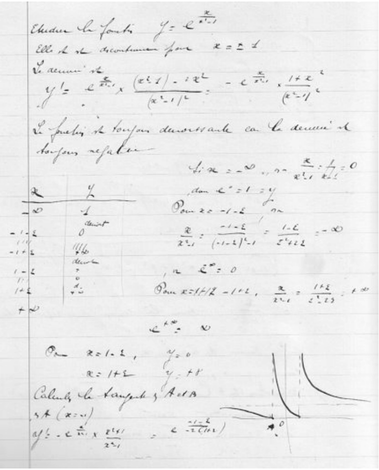
Théorème de Rolle - valeurs approchées

- Théorème de Rolle : La dérivée n-ième de $y = (x^2 - 4)^n$ a toutes ses racines réelles entre -2 et 2.
- $f(x) = 8x^3 - 6x^2 - 1 = 0$. Montrer que f admet une unique racine réelle. Valeur approchée à 10^{-2} près : par dichotomie, la méthode de Newton, la méthode des parties proportionnelles.



analyse - Etude de fonctions

- Etudier la fonction $y = \dfrac{x-1}{Lx}$.
- Etude de $y = L(x + \sqrt{x^2 + 4x - 1})$.
- Etudier $y = sin^5 x cos^3 x$
- Etudier $y = arccos L\dfrac{1+x}{1-x}$ sur $[\pi, 2\pi]$
- Construire $\rho = \dfrac{sin\omega + cos\omega}{cos 2\omega}$


Etudier la fonction $y = e^{\frac{x}{x^2-1}}$
Elle est discontinue pour $x = \pm 1$
La dérivée est
$y' = e^{\frac{x}{x^2-1}} \times \frac{(x^2-1)-2x^2}{(x^2-1)^2} = -e^{\frac{x}{x^2-1}} \times \frac{1+x^2}{(x^2-1)^2}$
La fonction est toujours décroissante car la dérivée est toujours négative
Calcul de la tangente en A et B

Séries entières

- Fonctions définies par une série entière en x à coefficients réels. Intervalle de convergence. Add., multiplication.
- A l'intérieur de l'intervalle de convergence, on obtient la dérivée ou les fonctions primitives de la fonction en prenant la série des dérivées ou des fonctions primitives.
- *Exemples* : $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1+x^2}$, $L(1-x)$, série exponentielle, série du binôme ; les équations $y' = y$ et $y'(1+x) = my$ permettent de déterminer les sommes de ces deux séries. Formule d'Euler.

« Une **innovation importante** est l'introduction des séries entières qui sont d'un **usage constant dans les applications** et qui forment, en même temps, la base de la théorie moderne des fonctions. [...] Il est expressément recommandé de ne pas se préoccuper des difficultés qui se présentent aux limites de l'intervalle de convergence »

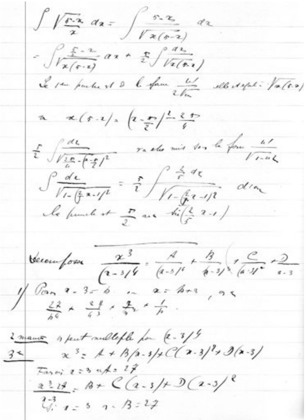
Nombres complexes

- a, b, c et d étant entiers, déterminer m et n tels que $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = m^2+n^2$.
- Calculer $\sqrt[3]{-i}$
- Démontrer que si m est un entier naturel non nul, l'équation $(1+ix)^m + (1-ix)^m = 0$ a toutes ses racines réelles.

« L'introduction des éléments imaginaires dans le programme a eu pour but de préciser les points que les professeurs devront enseigner et d'éviter les développements excessifs qui ont été quelquefois donnés à ces considérations. On n'a pas voulu exclure de l'enseignement un outil commode, dont l'usage est maintenant devenu familier ; mais il est nécessaire qu'on n'en abuse pas : **c'est dans le sens du réel que la géométrie analytique doit être développée.** »

intégration, décomposition en éléments simples

- Déterminer $f(x)$ tel que $$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2x^2+x+1}{(x+1)(x+2)(2x+1)}$$
- Calculer $\int \frac{Lx}{x}dx$, $\int \frac{1}{x^4+1}dx$
- Primitive de $cos^4 x$, $tg^3 x$, de $y = sin(ax)cos(bx)$
- Calcul de $\int \frac{dx}{chx - cha}$


$$\int \sqrt{\frac{5-x}{x}}\,dx = \int \frac{5-x}{\sqrt{x(5-x)}}\,dx$$
Décomposer $\frac{x^3}{(x-3)^4} = \frac{A}{(x-3)^4} + \frac{B}{(x-3)^3} + \frac{C}{(x-3)^2} + \frac{D}{x-3}$
$x^3 = A + B(x-3) + C(x-3)^2 + D(x-3)^3$

Polynômes

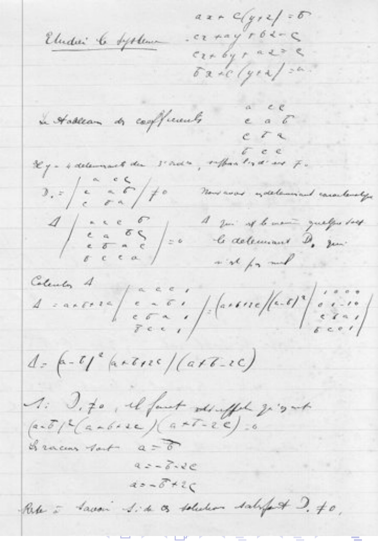
- Conditions pour que $x^3 + px^2 + qx + 2 = 0$ admette une racine double, pour que $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ admette une racine triple.
- Déterminer p de façon que le polynôme $x^3 + pxa^3 + b^3$ soit divisible par $x + a + b$
- Dérivée n-ième de $x^n e^x$ sous la forme $P_n e^x$. Montrer que P_n a toutes ses racines réelles.
- Résoudre $8x^5 + 12x^4 - 58x^3 - 87x^2 + 14x + 21 = 0$ sachant que $a + b = 1$, $cd = -7$

Déterminant

- Etudier le système

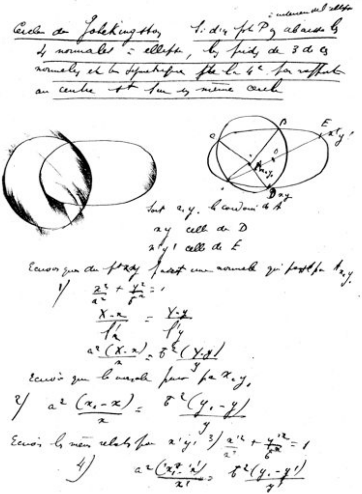
$$\begin{cases} ax + c(y+z) & = b \\ cx + ay + bz & = c \\ cx + by + az & = c \\ bx + c(y+x) & = a \end{cases}$$

« On devra habituer les élèves à raisonner directement sur les équations numériques, à les résoudre et à les discuter sans employer les déterminants ; ceux-ci devront servir **ensuite** à donner à la théorie sa forme la meilleure. »


Etudier le système
Le tableau des coefficients
Calculons Δ
$\Delta = (a-b)^2(a+b+2c)(a+b-2c)$

coniques

- Théorème de Fregier : *Toutes les cordes d'une conique, vues sous un angle droit d'un point donné sur cette conique rencontrent la normale à ce point en un point fixe*
- Si les quatre points de deux coniques sont sur un même cercle, leurs axes sont parallèles.



quadriques

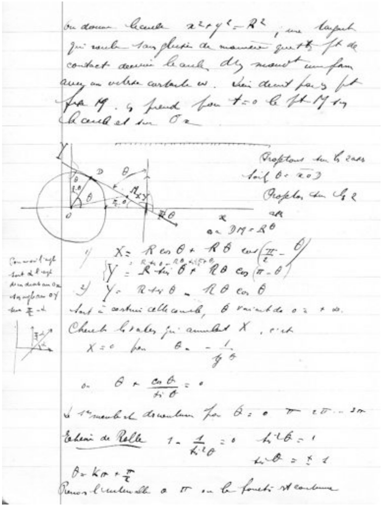
- Conditions pour que la section d'une quadrique par un plan tangent soit une droite double.
- Paraboloïde de révolution. Lieu des points situés sur cette surface tels que $OP = OM$ où P désigne le projeté orthogonal de M sur le plan $z = 0$.
- Droites qui sont toutes entières sur la surface $x^3 + y^3 + z^3 = a^3$.

« Une autre simplification est relative à l'étude des courbes et des surfaces de second ordre. Pour l'étude sur les équations réduites on devra laisser de côté les questions qui chargent la mémoire des élèves, comme la construction des axes d'une conique à centre dont on connaît deux diamètres conjugués, la recherche des diamètres conjugués égaux dans l'ellipsoïde, etc. »

mécanique

- Hodographe ; loi du mvt, équ. horaire.
- Mq dans l'attraction newtonnienne, une sphère agit comme si toute sa masse était concentrée en son centre.

« Il ne sera soulevé aucune difficulté sur les principes. Les élèves acquerront les notions de cinématique et de dynamique indispensables à l'enseignement de la physique dont l'importance industrielle grandit chaque jour. »



conclusion

1852 : « Que les exercices et les exemples proposés aux élèves portent toujours, et dès les premières leçons, sur des objets qui se rencontrent dans les arts, dans l'industrie, dans la nature, dans le système du monde, dans la physique, on y touvera de nombreux avantages. »

1904 : « Ce qu'il faut, [...] c'est susciter la spontanéité de l'élève, mettre en jeu ses activités mentales, provoquer son effort personnel, en un mot le rendre capable d'agir. »

conclusion

2009 : « Dans la mesure du possible, les problèmes posés s'inspirent de situations liées à la vie courante ou à d'autres disciplines. Ils doivent pouvoir s'exprimer de façon simple et concise et laisser dans leur résolution une place à l'autonomie et à l'initiative des élèves ».