

∞ Baccalauréat C Abidjan juin 1971 ∞

EXERCICE 1

On considère l'équation différentielle

$$(1) \quad y' + y = 2x.e^{-x},$$

dans laquelle x est une variable réelle quelconque, y une fonction inconnue de la variable x (qu'il s'agit précisément de déterminer).

1. Montrer que $y = e^{-x}$ est une solution particulière de l'équation sans second membre (c'est-à-dire de $y' + y = 0$).
2. On pose alors $y = z.e^{-x}$, définissant ainsi une nouvelle fonction z dont la dérivée est notée z' . Calculer y' en fonction de x, z et z' et former l'équation satisfaite par z' en reportant y' et y dans (1).
3. En déduire toutes les solutions de (1).
Soit y_1 la fonction particulière qui s'annule pour $x = 0$. Construire la représentation graphique de y_1 dans un repère orthonormé.

EXERCICE 2

Soit les deux transformations T_1 et T_2 définies pour tout point du plan par

$$M(x; y) \xrightarrow{T_1} M_1(x_1; y_1) \quad \text{et} \quad M(x; y) \xrightarrow{T_2} M_2(x_2; y_2)$$

avec

$$\begin{cases} x_1 = 1 - y, \\ y_1 = x - 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_2 = 2x - \frac{3}{2}, \\ y_2 = 2y + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

1. Montrer que T_1 est une rotation $R(\omega, \theta)$. (On déterminera ω et θ .)
2. Montrer que T_2 est une homothétie, H , de même centre que la rotation.
3. En déduire $T_1 \circ T_2$ et $T_2 \circ T_1$. Quelle est la nature de ces transformations?

PROBLÈME

On désigne par \mathbb{R} le corps des nombres réels et par (D) l'ensemble \mathbb{R}^2 des couples $(x; y)$ de nombres réels muni de l'addition H de la multiplication suivantes :

$$(x; y) + (x'; y') = (x + x'; y + y')$$

et

$$(x; y) \cdot (x'; y') = (x \cdot x'; xy' + yx').$$

Partie A

Prouver que $(D, +, \cdot)$ est un anneau commutatif, possédant pour unité l'élément $(+1; 0)$. Les éléments de (D) seront alors appelés nombres duaux.

Partie B

On note (D_1) [respectivement (D_2)] l'ensemble des nombres duaux de la forme $(x; 0)$ [respectivement de la forme $(0; y)$].

1. Trouver que (D_1) est un sous-anneau de (D) .
2. (D_2) est-il un sous-anneau de (D) ?
3. (D) peut-il être un corps ?
4. Prouver que $f : x \mapsto (x; 0)$ est un isomorphisme de l'anneau \mathbb{R} sur (D_1) .

Partie C

L'isomorphisme de la question B, 4. nous permet, dans la suite du problème, d'identifier (D_1) à \mathbb{R} , en posant $(x; 0) = x$ pour tout élément $(x; 0)$ de (D_1) .

1. Prouver que tout nombre dual z peut s'écrire d'une manière, et d'une seule, sous la forme

$$z = x + \epsilon y,$$

avec $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et $\epsilon = (0; +1)$.

2. Étudier les puissances ϵ^p de ϵ , ($p \in \mathbb{N}^*$).
3. Calculer z^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Rechercher les éléments inversibles de (D) .

Partie D

Soit $z = x + \epsilon y$ un nombre dual. On pose

$$\bar{z} = x - \epsilon y$$

et l'on définit le symbole $|z|$ en posant $|z| = |x|$, où le second membre désigne la valeur absolue du réel x .

1. Prouver que $z \cdot \bar{z} = |x|^2$.
2. Prouver que $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$.
3. Prouver que $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

Partie E

Soit $z \in (D) - (D_2)$. On pose $\text{Arg}(z) = \frac{y}{x}$.

Établir que

$$\text{Arg}(z.z') = \text{Arg}(z) + \text{Arg}(z'), \quad z \notin (D_2) \text{ et } z' \notin (D_2).$$

Partie F

Si f est une fonction réelle d'une variable réelle, dérivable sur \mathbb{R} , on la prolonge à (D) en posant, pour tout $z = x + \epsilon y$ de (D) ,

$$f(z) = f(x) + \epsilon y f'(x).$$

1. Donner les expressions de $\cos z$ et de $\sin z$.
2. Calculer $\cos^2 z + \sin^2 z$.
3. Calculer $\cos(z + z')$.
4. Calculer $\sin(z + z')$.