

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1975 Abidjan ∞

EXERCICE 1

On considère la fonction numérique réelle définie par :

$$f(x) = x\sqrt{x+1}$$

1. Étudier la variation de la fonction f et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé, l'unité choisie mesurant 2 centimètres.

Construire la tangente à l'origine; la courbe possède-t-elle une demi-tangente au point d'abscisse $x = -1$?

2. Dédurre de l'étude précédente le tracé des courbes suivantes :

- a. (C') d'équation $y = \sqrt{x^3 + x^2}$

- b. (Γ) d'équation $y^2 - x^3 - x^2 = 0$.

(On tracera ces courbes avec soin dans des repères distincts).

EXERCICE 2

On considère dans le plan complexe les deux sous-ensembles suivants :

- le demi-plan P formé de l'ensemble des points d'affixe $z = a + bi$, où $b > 0$, a et b étant réels;
- le disque D formé de l'ensemble des points d'affixe z tels que $|z| < 1$.

1. Montrer que, si l'on associe au point M d'affixe z le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{z-i}{z+i},$$

on obtient une bijection de P sur D .

2. Vérifier géométriquement que si $M \in P$, alors $M' \in D$, et réciproquement; on utilisera les points A et B d'affixes respectives i et $-i$, et l'on exprimera OM' en fonction de MA et MB .

EXERCICE 2

Dans ce problème, on désigne par :

- E un plan affine euclidien associé à un plan vectoriel \mathcal{U} et rapporté à un repère cartésien orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$;
- p un réel quelconque; e la base de l'exponentielle népérienne;
- f_p l'application de E dans E qui à tout point M de coordonnées $(x; y)$ associe le point M' de coordonnées $(x'; y')$ telles que :

$$\begin{cases} x' &= (1+p)e^p x - pe^p y \\ y' &= pe^p x + (1-p)e^p y \end{cases}$$

— \mathcal{P} l'ensemble des applications f_p lorsque p décrit l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels. Les parties B, C et D sont indépendantes et peuvent être abordées dans un ordre quelconque.

Partie A

1. Montrer que pour tout p l'application f_p est bijective; déterminer f_p^{-1} et montrer que $f_p^{-1} \in \mathcal{P}$.
2. Montrer que l'ensemble \mathcal{P} muni de la loi \circ (composition d'applications) est isomorphe au groupe $(\mathbb{R}, +)$; retrouver, en appliquant ce résultat, l'expression de f^{-1} .

Partie B

Soit \mathcal{R} la relation binaire définie sur E par :

$$M\mathcal{R}M' \iff \exists p \in \mathbb{R}, \quad M' = f_p(M)$$

1. Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.
On notera Γ la classe d'équivalence d'un point donné $M_0(x_0; y_0)$ du plan, c'est-à-dire l'ensemble des points $M = f_p(M_0)$ lorsque p décrit \mathbb{R} .
2. On suppose dans cette question que $x_0 = y_0$.
Déterminer la classe d'équivalence Γ de M_0 ; préciser sa nature, discuter suivant la position de M_0 .
3. On suppose dans cette question que $x_0 \neq y_0$.
 - a. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $M(x; y)$ appartienne à Γ est que l'on ait :

$$\frac{x_0 y - y_0 x}{y_0 - x_0} = (y - x) \operatorname{Log} \frac{y - x}{y_0 - x_0}.$$

- b. Montrer l'existence sur l'axe des abscisses d'un point unique M_1 élément de Γ (on calculera son abscisse x_1 en fonction de x_0 et y_0).
4. Soit A le point de coordonnées $(\alpha; 0)$ avec $\alpha \neq 0$. On désigne ici par Γ_α la classe d'équivalence de A.
 - a. Montrer que Γ_α peut être représentée paramétriquement par le système :

$$\begin{cases} x &= \alpha m(1 + \operatorname{Log} m) \\ y &= \alpha m \operatorname{Log} m \end{cases}$$

et que Γ_α est située dans un demi-plan ayant pour frontière la bissectrice des axes.

- b. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, Γ_α est globalement invariante par toute transformation f_p de l'ensemble \mathcal{P} et que Γ_α se déduit de Γ_1 par une transformation géométrique simple.
5. La relation \mathcal{R} détermine une partition du plan E. En utilisant les résultats précédents déterminer toutes les classes de cette partition; retrouver ainsi le fait que les courbes Γ_α ne coupent pas la bissectrice des axes.

Partie C

Dans cette partie uniquement, on se limite au cas $p = 1$.

Un point M a pour image $M' = f_1(M)$.

On suppose que M décrit la courbe (C) d'équation :

$$2x^2 + \lambda y^2 - 4\lambda xy - \frac{2}{e}x + \frac{1}{e}y - \frac{1}{e^2} = 0$$

où λ est un paramètre réel, et e désigne la base de l'exponentielle népérienne.

1. Vérifier que (C) est non vide.
2. Former l'équation de la courbe (C') image par f_1 de la courbe (C) . Préciser la nature de la courbe (C') selon les valeurs du paramètre λ .

Partie D

Dans cette partie, on se place dans le plan vectoriel \mathcal{U} associé à E et on désigne par $\overline{f_p}$ l'endomorphisme de \mathcal{U} associé à l'application affine f_p .

1. Déterminer la matrice de l'endomorphisme $\overline{f_p}$ dans la base (\vec{u}, \vec{j}) où $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$.
2. Montrer que quel que soit le vecteur \vec{v} il existe un vecteur \vec{u}_p (que l'on précisera) tel que :

$$\text{si } \vec{v} = x\vec{u} + y\vec{v}, \quad \text{alors } f_p(\vec{v}) = (\vec{v} + y\vec{u}_p)e^p.$$

3. Calculer, pour p et p' quelconques, $(\overline{f_{p'}} \circ \overline{f_p})(\vec{v})$ en utilisant la question précédente. Retrouver ainsi une démonstration du résultat de la question A - 2. concernant l'isomorphisme de (\mathcal{P}, \circ) avec $(\mathbb{R}, +)$.