

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Abidjan septembre 1969 ∞

EXERCICE 1

Calculer les intégrales indéfinies

$$I = \int \frac{3x}{(x^2 + 1)^3} dx \quad \text{et} \quad K = \int \cos x \sin 3x dx.$$

EXERCICE 2

Étudier les variations de la fonction

$$X \mapsto Y = X + \sqrt{|X^2 - 1|}$$

et tracer dans un repère orthonormé, sa représentation graphique. On précisera, si nécessaire, les asymptotes de cette courbe et l'on tracera ses tangentes aux points A, B et C d'abscisses respectives $-1, 0$ et $+1$.

PROBLÈME

On considère l'application qui à tout nombre complexe z associe le nombre

$$Z = \frac{z^2 + 5z + 6}{z + 1}.$$

Déterminer les constantes a et b telles que

$$Z = z + a + \frac{b}{z + 1}.$$

1. On suppose que z décrit le corps des réels (sauf -1).

a. Étudier les variations de la fonction qui à z fait correspondre Z .

Représenter le graphe (H) de cette fonction dans un repère orthonormé Oz , OZ de vecteurs unitaires \vec{i}, \vec{j} .

Montrer que ce graphe possède un centre de symétrie (on le désignera par C).

b. Soit les points $A(0 ; +4)$ et $B(-1 ; +4)$. On pose

$$\vec{I} = \overrightarrow{CA}, \quad \vec{J} = \overrightarrow{CB}.$$

Déterminer l'équation de la courbe (H) dans le repère (C, \vec{I}, \vec{J}) .

c. Déterminer une valeur approchée de Z pour

$$z = 1,002$$

2. On suppose que z décrit le corps des complexes (sauf -1) et l'on pose

$$z = x + iy, \quad Z = X + iY.$$

a. Déterminer X et Y en fonction de x et y .

b. Quel est l'ensemble des points $P(x; y)$ image de z lorsque Z est réel?

3. Au point $P(x; y)$ image de z , on associe le point $Q(X; Y)$ image de Z tel que

$$\begin{cases} X &= -2y + 4, \\ Y &= 2x - 3. \end{cases}$$

Quelle est la transformation ponctuelle ainsi définie?