

Durée : 4 heures

☞ Baccalauréat C Afrique¹ juin 1987 ☞

EXERCICE 1

4 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (I, \vec{i}, \vec{j}) . Soit α un réel non nul. On désigne par O_1 le point de coordonnées $(\alpha ; 0)$ et par O_2 le point de coordonnées $(-\alpha ; 0)$.

$P_1(\alpha)$ est la parabole de sommet I et de foyer O_1 .

$P_2(\alpha)$ est la parabole de sommet I et de foyer O_2 .

1. Montrer que les équations des paraboles $P_1(\alpha)$ et $P_2(\alpha)$ dans le repère (I, \vec{i}, \vec{j}) sont respectivement $y^2 = 4\alpha x$ et $y^2 = -8\alpha x + 8\alpha^2$.
2.
 - a. Déterminer les coordonnées des points d'intersection M_α et N_α des deux paraboles $P_1(\alpha)$ et $P_2(\alpha)$. On désignera par M_α le point d'intersection dont l'ordonnée est du signe de α .
 - b. En déduire l'ensemble des points M_α et N_α lorsque α décrit \mathbb{R}^* .
3. Montrer que $P_1(\alpha)$ et $P_2(\alpha)$ sont respectivement les images de $P_1(1)$ et $P_2(1)$ par l'homothétie de centre I et de rapport α .
En déduire que $\overrightarrow{IM_\alpha} = \alpha \overrightarrow{IM_1}$ et $\overrightarrow{IN_\alpha} = \alpha \overrightarrow{IN_1}$ et retrouver le résultat obtenu au 2. b.

EXERCICE 2

4 points

Dans l'espace orienté on considère un carré de sommets A, B, C, D et de centre O.

On désigne par E le point défini par $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OE}$.

Soit f une isométrie laissant globalement invariant l'ensemble $\{A, B, C, D, E\}$.

1.
 - a. Montrer que les images par toute isométrie des points A, B, C, D sont coplanaires. En déduire que l'ensemble $\{A, B, C, D\}$ est globalement invariant par f et montrer que E est invariant.
 - b. En remarquant que O est l'isobarycentre des points A, B, C, D montrer que O est invariant par f .
2. Si f est une rotation, quel est son axe?
En déduire toutes les rotations laissant l'ensemble $\{A, B, C, D, E\}$ globalement invariant.
3. Montrer que si f est une réflexion, son plan contient la droite (OE).
En déduire toutes les réflexions laissant l'ensemble $\{A, B, C, D, E\}$ globalement invariant.

PROBLÈME

12 points

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

A. Distance du point A(1 ; 1) à la courbe (\mathcal{C}) d'équation $y = e^{-x}$

1. Maroc, Djibouti

1. Construire, sur la feuille de papier millimétrée, la courbe (\mathcal{C}) en précisant les points d'abscisses 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1 (unité : 5 cm; le point A étant approximativement au centre de la feuille).
2. Exprimer en fonction de l'abscisse x d'un point M de (\mathcal{C}) la distance $d(x)$ de A à M . Calculer la dérivée d' de la fonction d et montrer que pour tout réel x , $d'(x)$ est du signe de $g(x) = e^{-x} - e^{-2x} + x - 1$.
3. Montrer que g' est strictement croissante sur \mathbb{R} et préciser le comportement de $g(x)$ quand x tend vers plus l'infini et quand x tend vers moins l'infini.
On pourra remarquer que $e^{-x} - e^{-2x} = e^{-x}(1 - e^{-x})$.
La représentation graphique de g n'est pas demandée.
4. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique x_0 dans \mathbb{R} et que x_0 appartient à $] \ln 2 ; 1 [$.
5. Montrer que la fonction d admet un minimum absolu en x_0 .
Dans la suite du problème on notera M_0 le point de (\mathcal{C}) d'abscisse x_0 .
Par définition la distance de A à (\mathcal{C}) est $d_0 = AM_0 = d(x_0)$.
6. Montrer que la tangente en M_0 à la courbe (\mathcal{C}) est perpendiculaire à la droite (AM_0) .

B. Évaluation de cette distance d_0

On considère l'application h , de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , définie par :

$$h(x) = e^{-2x} - e^{-x} + 1.$$

On désigne par Γ la courbe représentative de h dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Évaluation graphique
 - a. Dresser le tableau de variations de h (on précisera le comportement de $h(x)$ quand x tend vers plus l'infini et quand x tend vers moins l'infini).
 - b. Étudier la position relative des courbes (\mathcal{C}) et Γ .
 - c. Construire Γ dans le même repère que (\mathcal{C}) en précisant les points d'abscisses 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1.
 - d. Montrer que Γ coupe la droite d'équation $y = x$ en un point H_0 de même abscisse que M_0 ; utiliser les courbes (\mathcal{C}) et Γ pour construire M_0 et mesurer la distance d_0 en utilisant une règle graduée.

2. Approximation de d_0

On considère la suite définie par $\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & h(u_n) \end{cases}$ pour tout n de \mathbb{N}

- a. Montrer que pour tout x de $[\ln 2 ; 1]$, $h(x)$ appartient à $[\ln 2 ; 1]$.
En déduire que pour tout n de \mathbb{N} , u_n appartient à $[\ln 2 ; 1]$.
- b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante. (On pourra utiliser un raisonnement par récurrence.)
En déduire que (u_n) est convergente et montrer que sa limite est x_0 .
- c. Donner une valeur approchée de u_4 à 10^{-4} près, puis une valeur approchée de $d(u_4)$.