Baccalauréat C Aix-en-Provence juin 1971

EXERCICE 1

Rappeler sans démonstration la limite de $\dfrac{\text{Log}\,x}{x}$ quand x tend vers $+\infty$ (Log désigne la fonction logarithme népérien).

En déduire les limites quand x tend vers $+\infty$ de $x - n\text{Log}\,x$ et de $\dfrac{x^n}{\text{e}^x}$ (n désignant un entier positif fixé.

EXERCICE 2

Soit dans le plan un triangle équilatéral ABC.

La bissectrice intérieure de $\widehat{\text{A}}$ recoupe le cercle circonscrit en D. On suppose que $\left(\overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AC}}\right) = +\dfrac{\pi}{3}$.

Réduire à une transformation simple le produit

$$S_{\text{BD}} \circ S_{\text{DC}} \circ S_{\text{CA}} \circ S_{\text{AB}}.$$

(S_{XY} désigne la symétrie d'axe XY.)

PROBLÈME

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. (P) désigne le plan privé de l'origine, O, de ce repère. (E) désigne l'ensemble des triplets (A, B, C) de trois points de (P) dont les affixes a, b et c dans ce repère vérifient la relation $ac = b^2$.

1. B sera dans cette question un point fixe de (P), d'affixe b.

   Montrer qu'à tout point M de (P) peut être associé un, et un seul, point, M', tel que $(M, \text{B}, M') \in$ (E), ce qui définit une transformation T dans (P).

   T est-elle involutive ? Quel est l'ensemble de ses points doubles ?

   Calculer le module et l'argument de l'affixe, m', de M' en fonction de ceux de l'affixe m de M.

   En déduire que T est le produit commutatif d'une symétrie d'axe OB et d'une inversion, que l'on précisera.

2. (F) désigne l'ensemble des triplets (A, B, C) de (E) qui vérifient de plus la relation $a + b + c = 0$.

   a. Si (A, B, C) $\in$ (F), montrer que (B, C, A) $\in$ (F) et que (C, A, B) $\in$ (F).

   Que dire, réciproquement, si (A, B, C) $\in$ (E) et (B, C, A) $\in$ (E) ?

   b. Si (A, B, C) $\in$ (F), montrer que a, b et c sont les trois racines d'une équation de la forme

   $$z^3 - k = 0 \quad (k \text{ complexe}).$$

   Étudier la réciproque.

3. A_1 et A_2 étant deux points donnés dans (P), montrer que l'on peut déterminer une suite de points A_n (n entier naturel) telle que l'on ait

$$(A_1, A_2, A_3) \in (E),\ (A_2, A_3, A_4) \in (E), \ldots,\ (A_n, A_{n+1}, A_{n+2}) \in (E)$$

Comment A_1 et A_2 doivent-ils être choisis pour que les A_n soient tous distincts ?

N. B. - Les trois questions sont indépendantes.