

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C 1975 Aix en Provence ∞

EXERCICE 1

Partie A

Le plan affine est rapporté à un repère orthonormé . Les coordonnées (dans ce repère) d'un point mobile sont données en fonction du temps par

$$x = e^t, \quad y = e^{2t} - 2t.$$

M ayant $(x ; y)$ pour coordonnées dans $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ et e désigne la base du logarithme népérien.

1. Déterminer la trajectoire (T) de M l'équation cartésienne et construction de (T) .
2. Déterminer l'hodographe (H) du mouvement de M . Tracer cet hodographe dans le même repère que (T) . (il s'agit de l'hodographe par rapport au point O).
3. Calculer l'aire de la portion de plan limitée par l'axe (O, \vec{i}) par les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$ et par la courbe (T) .

Partie B

Une urne contient 4 boules rouges, 3 boules noires, 1 boule blanche. On tire en une seule fois trois boules.

On veut la probabilité d'avoir

A : deux boules rouges au moins,

B : deux boules de même couleur au moins,

C : une boule de chaque couleur.

On admet l'équiprobabilité des tirages.

1. Proposer un espace probabilisé fini permettant la description de cette situation.
2. Calculer ensuite $p(A)$, $p(B)$, $p(C)$.

On attachera la plus grande importance au 1. Les réponses à la question 2. n'ont d'intérêt que si un espace probabilisé fini (Ω, β, p) a été correctement défini.

Partie C

\mathbb{N} désigne l'ensemble des entiers naturels, \mathbb{Z} désigne l'anneau des entiers « relatifs », \mathbb{C} le corps des nombres complexes. On note

$$j = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \quad \text{et } u = 1 + j.$$

$|z|$ désigne le module de $z \in \mathbb{C}$. désigne le module de

1. a. Établir la relation $1 + j + j^2 = 0$.
Calculer u^2, u^3, \dots, u^n pour toutes les valeurs de \mathbb{N} .

- b.** Vérifier que $(1, j)$ est une base de \mathbb{C} considéré comme espace vectoriel sur \mathbb{R} , corps des nombres réels.
- 2. a.** Soit $E = \{z \in \mathbb{C} / \exists a \in \mathbb{Z}, \exists b \in \mathbb{Z}, z = a + jb\}$.
Y a-t-il unicité de l'écriture d'un élément de E sous la forme $z = a + jb$?
Déterminer $U = \{z \in E, |z| = 1\}$.
- b.** Établir que les opérations sur \mathbb{C} définissent sur E une structure d'anneau unitaire.
Déterminer les éléments inversibles (pour la multiplication) de E . Montrer que la multiplication (dans \mathbb{C}) définit sur U une structure de groupe.
- c.** Déterminer $z \in E$ tel que $z\bar{z} = 3$ et $z + \bar{z} = 0$.
- d.** Soit $v = 1 - j$; montrer que, si v peut être écrit $v = \lambda\mu$, $\lambda \in E$, $\mu \in E$ alors $\lambda \in U$ ou $\mu \in U$.
- 3. a.** Soit $I = \{\omega \in E / \exists z \in E, \omega = vz\}$, avec $v = 1 - j$.
Établir que I est un sous-groupe du groupe additif E .
Déterminer $\{z \in I / x \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{C}\}$.
Démontrer que $\forall \omega \in I, \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tel que $\omega = \alpha v + \beta(vu)$ avec unicité du couple (α, β) .
- b.** Soit $z = a + jb \in E$, $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Montrer que $z - (a + b) \in I$.
En déduire que $\forall z \in E$, on a l'une des relations $z \in I, z - 1 \in I, z + 1 \in I$.
- c.** On définit une relation binaire entre éléments de E par

$$z z' \equiv z - z' \in I.$$

Vérifier que cette relation est bien une relation d'équivalence.

Vérifier que cette relation est compatible avec l'addition et la multiplication dans E .

Vérifier que l'ensemble quotient peut être muni d'une structure de corps par des opérations définies naturellement à partir des opérations dans E . Préciser la nature de ce corps (nombre d'éléments, comparaison avec un corps classique).