

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Aix-Marseille juin 1976 ∞

EXERCICE 1

1. Déterminer suivant les valeurs de n ($n \in \mathbb{N}$), le reste de la division de 4^n par 7.
2. Déterminer suivant les valeurs de n ($n \in \mathbb{N}$), le reste de la division de

$$A = 851^{3n} + 851^{2n} + 851^n + 2 \quad \text{par 7.}$$

3. On considère le nombre B qui dans le système à base quatre s'écrit :

$$B = 2103211$$

Déterminer dans le système décimal, le reste de la division du nombre B par 7.

EXERCICE 2

Soit f la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

Étudier les variations de f et construire sa représentation graphique (\mathcal{C}) dans un repère orthonormé. Montrer que (\mathcal{C}) admet un centre de symétrie.

x étant un réel strictement négatif, déterminer

$$\int_{-1}^x \frac{e^t}{e^t - 1} dt$$

et étudier sa limite pour x tendant vers $-\infty$.

PROBLÈME

Le plan affine euclidien (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

1. On considère la courbe (H) d'équation : $x^2 - 2y^2 = 1$ (1).
Quelle est la nature de cette courbe? Déterminer ses sommets, ses asymptotes et la dessiner.
2. On considère dans le plan (P) le mouvement du point $M(x; y)$ tel que

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\cos(2t)} \\ y = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{tg}(2t) \end{cases} \quad \text{où } t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right[$$

- a. Montrer que la trajectoire (T) est une partie de (H) que l'on précisera.
- b. Déterminer les composantes du vecteur vitesse $\overrightarrow{t \text{ext} V}$ et du vecteur accélération $\overrightarrow{\Gamma}$ dans la base (\vec{i}, \vec{j}) . Vérifier que le mouvement est accéléré, c'est-à-dire que la fonction $t \mapsto \|\overrightarrow{V}(t)\|$ est croissante.

Partie B

On appelle E l'ensemble des applications affines F de (P) dans (P) telles que $F(O) = O$ et $F(H) = H$ cette dernière condition exprimant que la courbe (H) est globalement invariante par F .

On appelle f l'application linéaire associée à F de matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ dans la base (\vec{i}, \vec{j}) .

1. a. Quelle peut-être, par une application affine non bijective, l'image du plan (P)? En déduire que tout élément de E est une bijection.
- b. Montrer que (E, \circ) est un groupe.
2. Soit $M(x; y)$ et $M'(x'; y')$ tels que $M' = F(M)$.

On aura

$$\begin{cases} x' = ax + cy \\ y' = bx + dy \end{cases}$$

Sachant que $F \in E$ si et seulement si $F^{-1} \in E$, écrire l'équation de $F^{-1}(H)$ en fonction de (a, b, c, d) .

En déduire que

$$F^{-1}(H) = H \iff \begin{cases} a^2 - 2b^2 = 1 \\ c^2 - 2d^2 = -2 \\ ac - 2bd = 0 \end{cases}$$

On pourra utiliser pour cela les points $A(1; 0)$, $B(\sqrt{3}; 1)$, $C(-\sqrt{3}; 1)$, points qui appartiennent à la courbe (H).

3. En déduire que F est élément de E si et seulement si la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & 2\epsilon b \\ b & \epsilon a \end{pmatrix}$ avec $\epsilon \in \{-1; +1\}$ et $a^2 - 2b^2 = 1$.

Partie C

Soit E' le sous-ensemble des applications F de E telles que $\epsilon = +1$.

1. Montrer que E' est stable pour \circ .
2. Soit (L) l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que

$$x^2 - 2y^2 = 1 \quad \text{avec} \quad (x; y) \in \mathbb{N}^2$$

Vérifier que $M_0(1; 0)$ et $M_1(3; 2)$ appartiennent à (L) .

Soit F_1 l'application affine de E' telle que $a = 3$ et $b = 2$.

On considère la suite des points $M_n(x_n; y_n)$, $n \in \mathbb{N}$, telle que :

$$x_0 = 1 \quad ; \quad y_0 = 0 \quad ; \quad M_{n+1} = F_1(M_n)$$

Montrer que $M_n = F_1^n(M_0)$ où $F_1^2 = F_1 \circ F_1$ et $F_1^n = F_1^{n-1} \circ F_1$.

Vérifier que M_n est un élément de (L) .

3. Établir par récurrence que

$$\begin{aligned} (3 + 2\sqrt{2})^n &= x_n + y_n\sqrt{2} \\ (3 - 2\sqrt{2})^n &= x_n - y_n\sqrt{2} \end{aligned}$$

quel que soit n élément de \mathbb{N} .

En déduire x_n et y_n en fonction de n .

4. On appelle (T) l'ensemble des points $M(x; y)$ de (H) pour lesquels x et y appartiennent à \mathbb{R}_+ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle A_n l'ensemble défini par :

$$A_n = \{M / M \in (T), x_n \leq x < x_{n+1}\}$$

Montrer que A_{n+1} est l'image par F_1 de A_n .

En déduire que

$$M \in A_n \Rightarrow [F_1^{-1}]^n(M) \in A_0$$

Montrer que $M \in (L) \cap A_{n+1} \Rightarrow F_1^{-1}(M) \in (L)$.

En déduire que tout point de (L) est un élément de la suite (M_n) .