

∞ Baccalauréat C groupe 4¹ juin 1983 ∞

EXERCICE 1

3 POINTS

1. Quel est l'ensemble des nombres complexes z vérifiant $|z - 1| = |\bar{z} + 1|$?
Expliquer géométriquement le résultat trouvé, en considérant un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ et en associant à tout point $M(x; y)$ du plan son affixe z , c'est à dire le nombre complexe défini par $z = x + iy$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z vérifiant $(z - 1)^n = (\bar{z} + 1)^n$.

EXERCICE 2

4 POINTS

Soit f la fonction numérique définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = xe^{1-x}.$$

1. Étudier la fonction f (variations et limites); tracer la courbe représentative dans un repère orthonormé.
2. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose :

$$g(x) = 1 + x + \dots + x^n = \sum_{k=1}^n c^k.$$

et

$$S_n(x) = 1 + 2x + \dots + nx^{n-1} = 1 + \sum_{k=2}^n kx^{k-1}.$$

Pour $x \neq 1$, justifier que $g(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$. En déduire, par dérivation pour $x \neq 1$, une expression de $S_n(x)$.

- b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$s_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n) = \sum_{k=1}^n f(k).$$

Déterminer une expression de s_n . Quelle est la limite de la suite (s_n) quand n tend vers $+\infty$?

PROBLÈME**13 POINTS**

La seconde partie est indépendante de la première; et dans la première, la partie B ne dépend pas de A.

Dans tout le problème, E est un espace affine euclidien de dimension 3 rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dont les axes sont notés Ox, Oy et Oz.

Partie I.

On note Ω et $\bar{\Omega}$ les points de coordonnées respectives $(0; 0; 1)$ et $(0; 0; -1)$. On dira qu'une isométrie laisse **invariant** un sous ensemble G de E si et seulement si $f(G) = G$.

A.

1. Soit f une isométrie affine de E vérifiant $f(O) = O$ et laissant la droite Oz invariante. On note \vec{f} l'endomorphisme associé.

a. Établir que $f(\Omega)$ est égal à Ω ou $\bar{\Omega}$.

Quelles sont les valeurs possibles de $\vec{f}(k)$?

Montrer que $\vec{f}(\vec{i})$ et $\vec{f}(\vec{j})$ sont orthogonaux à \vec{k} .

b. Soit M un point de coordonnées $(x; y; z)$, soit $(x'; y'; z')$ les coordonnées du point M' image de M par f .

Montrer que $z'^2 = z^2$. Puis en déduire que

$$x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2.$$

2. Quels sont les déplacements f de E vérifiant $f(O) = O$ et qui laissent la droite Oz invariante?

B. Dans toute la suite du problème, on note Γ le sous ensemble de E défini par l'équation

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

1. a. Étudier l'intersection de Γ avec le plan d'équation $x = 0$. Faire une figure.

b. Pour tout λ réel, on note P_λ le plan d'équation $z = \lambda$. Donner une équation de $P_\lambda \cap \Gamma$ dans le repère $(\omega_\lambda; \vec{i}, \vec{j})$ où ω_λ est le point de coordonnées $(0; 0; \lambda)$.

Quelle est la nature de $P_\lambda \cap \Gamma$ lorsque $\lambda \neq 0$?

Préciser $P_0 \cap \Gamma$.

2. a. Soit A un point quelconque de Γ , distinct de O. Montrer que la droite (OA) est incluse dans Γ .

b. Soit Δ une droite incluse dans Γ . Montrer que Δ passe par O. (On pourra étudier l'intersection de Δ et P_0).

C.

1. Soit f une isométrie affine de E vérifiant $f(O) = O$ et laissant globalement invariante la droite Oz .
Déduire des résultats de la question A 1. que $f(\Gamma) = \Gamma$.
Dans la question suivante, on va établir qu'il s'agit là des seules isométries laissant Γ invariant.
2. Soit, maintenant, f une isométrie de E vérifiant $f(\Gamma) = \Gamma$.
 - a. Établir que $f(O) = O$. (On pourra considérer deux droites distinctes incluses dans Γ .)
 - b. Soit M un point de Γ , de coordonnées $(x; y; z)$. Quelle est en fonction de z seulement, la distance de M à O ?
Soit S la sphère de centre O et de rayon $\sqrt{2}$. Vérifier que $S \cap \Gamma$ est l'union de deux cercles dont on précisera les plans les contenant, les rayons et les centres.
 - c. Montrer que $f(S \cap \Gamma) = S \cap \Gamma$; en déduire que $f(\omega)$ est égal à Ω ou $\bar{\Omega}$. Que peut-on en conclure pour l'image de la droite Oz par f ?

Partie II.

On considère le plan Π d'équation $y + z\sqrt{3} = \sqrt{3}$.

1. Déterminer les points B et C d'intersection de Π avec, respectivement Oy et Oz .
On définit \vec{u} par : $\overrightarrow{BC} = BC \vec{u}$, où BC est la distance de B à C .
Calculer les coordonnées de \vec{u} . Vérifier que $(B; \vec{i}, \vec{u})$ est un repère orthonormé de Π .
2. Soit M un point quelconque de Π , de coordonnées $(X; Y)$ dans le repère $(B; \vec{i}, \vec{u})$.
Montrer que les coordonnées $(x; y; z)$ de M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de E sont données par :

$$x = X, \quad y = \sqrt{3} - Y \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z = \frac{Y}{2}.$$

3. Soit \mathcal{E} l'ensemble des points M du plan Π dont les coordonnées $(x; y; z)$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de E vérifient $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.
Trouver une équation cartésienne de \mathcal{E} dans le repère $(B; \vec{i}, \vec{u})$ de Π .
Quelle est la nature de \mathcal{E} ?
Le plan Π étant pris comme plan de feuille, tracer \mathcal{E} .
4. On considère l'application g de E dans lui-même qui à tout point M de coordonnées $(x; y; z)$ associe le point M' de coordonnées $(x'; y'; z')$ défini par :

$$\begin{cases} x' = x\sqrt{2} \\ y' = y\sqrt{3} + z \\ z' = y + z\sqrt{3}. \end{cases}$$

Comparer $x'^2 + y'^2 - z'^2$ et $x^2 + y^2 - z^2$. Quelle est l'image de Π par g ?

Si vous avez traité la première partie, commentez éventuellement brièvement.