

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Aix en Provence septembre 1969 ∞

EXERCICE 1

Étudier les restes de la division par 7 des nombres

$$2^n \text{ et } 3^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

et résoudre alors l'équation

$$2^x + 3^x \equiv 0 \pmod{7},$$

où x est un entier positif et où le symbole \equiv désigne une relation de congruence.

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie pour x réel par

$$f(x) = e^{-x}(x + a),$$

où a est une constante réelle, dont on calculera la valeur, sachant que $f'(-1) = 0$.

1. Variation et représentation graphique de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (Ox, Oy) .
2. Calculer A et B pour que $(Ax + B)e^{-x}$ soit une primitive de f .
Calculer l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe, l'axe Ox et les parallèles à Oy d'abscisses -2 et -1 .

PROBLÈME

Le mouvement d'un point M est rapporté à un repère orthonormé (Ox, Oy) . Les coordonnées, x et y , de M sont exprimées en fonction du temps t par

$$x = \operatorname{tg}^2 t - 1 \quad \text{et} \quad y = 2 \operatorname{tg} t \quad t \in \left] -\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2} \right[.$$

1. Déterminer analytiquement la trajectoire. La construire dans le repère donné. Préciser ses éléments géométriques.
2. Soit \overrightarrow{MV} le vecteur vitesse à la date t . Calculer en fonction de t le module et l'argument de chacun des nombres complexes z et Z ayant pour images respectives les vecteurs \overrightarrow{OM} et \overrightarrow{MV} .
3. Calculer le nombre complexe Z' dont l'image est le vecteur \overrightarrow{MN} transformé de \overrightarrow{MV} par la similitude directe de centre M , de rapport $k = \cos^2 t$ et d'angle $\alpha = -\frac{\pi}{2}$.
En déduire les coordonnées de N en fonction de t . Étudier l'ensemble des points N quand t varie. Expliquer géométriquement le résultat obtenu.

4. M étant la position du mobile à la date t ($-\frac{\pi}{2} < t < 0$) et M_1 sa position à la date $t_1 = t + \frac{\pi}{2}$, montrer que M , O et M_1 sont alignés et que les vecteurs \overrightarrow{MV} et $\overrightarrow{M_1V_1}$ (vecteurs vitesse aux dates t et t_1) ont des supports perpendiculaires.

Quel est, quand t varie, l'ensemble des points R , conjugués harmoniques de O par rapport à M et M_1 ?

5. On transforme M et M_1 respectivement en P et P_1 par l'inversion de pôle O et de puissance 4. Soit I le milieu de PP_1 .

Calculer les affixes des points P , P_1 et I en fonction de t . En déduire l'ensemble des points I quand t varie. Retrouver géométriquement ce résultat.