

∞ Baccalauréat C Aix-en-Provence septembre 1976 ∞

EXERCICE 1

1. Soit la fonction numérique f définie par

$$f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-1}}$$

Etudier les variations de la fonction et construire sa représentation graphique (C) dans un repère orthonormé.

2. Soit la fonction numérique F définie par

$$F(x) = \text{Log} \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right).$$

Calculer $F'(x)$ et en déduire l'aire du domaine limité par l'axe des abscisses, (C) et les droites d'équations $x = 2$ et $x = \alpha$ (avec $\alpha > 2$).

EXERCICE 2

Résoudre dans le corps des complexes, l'équation :

$$z^2 - (3i - 1)z - 4 = 0.$$

On désigne par Z' et Z'' les racines de cette équation. On pose $Z' = x' + iy'$ avec $x' > 0$ et $Z'' = x'' + iy''$ avec $x'' < 0$.

Dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ de sens positif, on désigne par M' et M'' les images respectives des nombres Z' et Z'' .

Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe S de centre O telle que $S(M') = M''$.

PROBLÈME

Soit E un plan vectoriel euclidien réel dont (\vec{i}, \vec{j}) est une base orthonormée.

On désigne par \mathcal{E} un plan affine associé à E et rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f l'application affine de \mathcal{E} vers \mathcal{E} telle que :

- $f(A) = A_1$ avec $A(1; -2)$ et $A_1(2; 4)$
- L'application linéaire φ associée à f a pour matrice dans la base (\vec{i}, \vec{j})

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Soit $M(x; y)$ un point quelconque de \mathcal{E} , $M_1(x_1; y_1)$ son image par f ; et $M_2(x_2; y_2)$ l'image de M_1 par f .

1. Établir les relations

$$\begin{cases} x_1 &= -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y + 2 \\ y_1 &= 3x - \frac{1}{2}y \end{cases}$$

2. a. Montrer que f est bijective.

b. Soit D une droite quelconque de \mathcal{E} ; $f(D)$ la droite transformée de D par f . (D) et $f(D)$ peuvent-elles être parallèles?

c. En déduire que pour tout point $M \in \mathcal{E}$ tel que $f(M) \neq M$, les points M, M_1, M_2 ne sont pas alignés.

d. Déterminer par son équation l'ensemble (C) des points $M(x; y) \in \mathcal{E}$ tels que $K(1; 0), M, M_1$ sont alignés. Donner la nature de la courbe (C) et la construire.

3. Calculer les coordonnées x' et y' du barycentre G des points M, M_1, M_2 affectés d'un même coefficient non nul (G est l'isobarycentre des points M, M_1, M_2).

Vérifier que G est indépendant de M et montrer que G est le seul point invariant par f .

En déduire que $f^3 = f \circ f \circ f$ est l'application identique de \mathcal{E} ; c'est-à-dire : $f^3 = I_{\mathcal{E}}$.

Partie B

Soit $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel sur \mathbb{R} des applications linéaires de E vers E . On pose :

$$\mathcal{J} = \{\varphi \in \mathcal{L}(E) / \varphi^3 = \varphi \circ \varphi \circ \varphi = I_{\mathcal{E}}\}.$$

$I_{\mathcal{E}}$ désignant l'application identique de E . On posera de même $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$.

1. a. Montrer que $I_{\mathcal{E}} \in \mathcal{J}$.

b. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\varphi^2 = -\varphi - I_{\mathcal{E}}$. Montrer que $\varphi \in \mathcal{J}$. La réciproque est-elle vraie?

c. Montrer que toute application de \mathcal{J} est bijective.

2. On considère une application φ telle que $\varphi^2 = -\varphi - I_{\mathcal{E}}$.

a. Montrer que $(\varphi; I_{\mathcal{E}})$ est une partie libre de $\mathcal{L}(E)$.

b. On pose $\theta = \alpha\varphi + \beta I_{\mathcal{E}} : (a; b) \in \mathbb{R}^2$.

Montrer que $\theta^2 = \theta \circ \theta$ est une combinaison linéaire de φ et $I_{\mathcal{E}}$. Calculer $\theta^3 = \theta \circ \theta \circ \theta$.

En déduire que θ appartient à \mathcal{J} si et seulement si

$$\theta = I_{\mathcal{E}} \quad \text{ou} \quad \theta = \varphi \quad \text{ou} \quad \theta = \varphi^2.$$

3. Soit φ un élément de \mathcal{J} tel qu'il existe un vecteur non nul $\vec{V} \in E$ tel que $\varphi(\vec{V}) = \vec{V}$.

Soit \vec{V}' non colinéaire à \vec{V} , $\vec{V}' \in E$.

a. Justifier que la matrice de φ dans la base (\vec{V}, \vec{V}') est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

- b.** Calculer la matrice de φ^3 dans cette base, en déduire que $\varphi = I_{\mathcal{E}}$.
- 4.** Application : Soit f une application affine quelconque avec $f \neq I_{\mathcal{E}}$ et vérifiant $f^3 = I_{\mathcal{E}}$. Soit φ l'application linéaire associée à f .
- a.** Montrer que $\varphi \in \mathcal{J}$ et $\varphi \neq I_{\mathcal{E}}$.
- b.** Montrer que Ω (isobarycentre de $M, f(M), f^2(M)$) est un point invariant par f ,
- c.** Montrer que Ω est le seul point invariant par f .