Durée : 4 heures

Baccalauréat C Aix-Marseille juin 1969

EXERCICE 1

On considère la transformation T du plan complexe qui, au point M d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe z' déterminée par

$$z' = \left(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right) z - 2\sqrt{3}.$$

Montrer que T est une similitude directe, dont on précisera le centre, ω, l'angle, θ, et le rapport k. Caractériser le triangle formé par le centre, ω, et deux points homologues, M et M'.

EXERCICE 2 **5 points**

Étudier et représenter graphiquement en axes orthonormés la fonction f définie, pour x réel strictement positif, par

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}.$$

Calculer l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe représentative de f, l'axe Ox et les droites $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $x = 1$.

PROBLÈME **10 points**

1. Le plan étant rapporté à un repère orthonormé, Ox, Oy, les coordonnées, x, y, d'un point mobile M sont données, à chaque instant t, par

$$\left\{\begin{array}{l c l} x &=& 1 + 2\cos^2 t,\\ y &=& 2\sin t\cos t.\end{array}\right.$$

Montrer que la trajectoire de M est un cercle, (Γ), décrit d'un mouvement uniforme.

EXERCICE 1

Écrire, en fonction de t, l'équation de la tangente en M à (Γ).

2. On appelle transformé du point $M(x~;~y)$ appartenant à (Γ) le point $M'(X~;~Y)$ défini par les deux conditions suivantes :
   a. OM' est perpendiculaire à la tangente en M à (Γ) ;
   b. le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{O}M} \cdot \overrightarrow{\mathrm{O}M'}$ est égal à 3.

Soit (C) l'ensemble des points M'. Établir que les coordonnées, X, Y, de M' vérifient le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l c l} X(2 + \cos 2t) + Y\sin 2t &=& 3,\\ X\sin 2t - Y\cos 2t &=& 0.\end{array}\right.$$

Former une équation cartésienne de (C). Montrer que (C) est une hyperbole.

3. Exprimer les coordonnées, X et Y, de M' en fonction de t. Déterminer un système de paramètres directeurs de la tangente en M' à (C). Montrer que cette tangente est perpendiculaire à la droite OM en un point m; vérifier que ce point m appartient au cercle (Γ).

4. On donne à t deux valeurs, t_1 et t_2, qui diffèrent de $\dfrac{\pi}{2}$. Montrer que les points correspondants, M_1 et M_2, sont diamétralement opposés sur (Γ) et que leurs transformés, M_1' et M_2', sont alignés avec O.

Soit P conjugué harmonique de O par rapport à M_1' et M_2', S l'intersection des tangentes à (C) en ces points.

Établir que, lorsque t_1 et t_2 varient, leur différence restant égale à $\dfrac{\pi}{2}$, P et S se déplacent sur la même droite fixe, (Δ), qui est une droite remarquable pour la courbe (C).

(On pourra utiliser la résultat établi à la question 3.