

## Baccalauréat C Aix-Marseille juin 1979

### EXERCICE 1

**4 points**

Soit  $\mathbb{C}$  l'ensemble des nombres complexes et  $f$  l'application de  $\mathbb{C} - \{-i\}$  dans  $\mathbb{C}$  telle que

$$f(z) = \frac{z-i}{z+i}.$$

1. Démontrer que  $f$  applique bijectivement  $\mathbb{C} - \{-i\}$  sur  $\mathbb{C} - \{1\}$ .
2. Quelle est l'image par  $f$  de l'ensemble  $P$  des nombres complexes dont la partie imaginaire est strictement positive?

### EXERCICE 2

**4 points**

Soit  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction logarithme népérien dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1.  $x$  étant un réel strictement positif on considère le point  $M$  de  $\mathcal{C}$  qui a pour abscisse  $x$  et l'on désigne par  $m$  le coefficient directeur de la droite  $(OM)$ .

Construire la tableau de variations de la fonction continue

$$\begin{array}{ccc} \mu : \mathbb{R}_+^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & m. \end{array}$$

2. Soient  $A$  et  $B$  deux points de  $\mathcal{C}$  d'abscisses respectives  $a$  et  $b$  telles que  $a < b$ . Démontrer que, si  $a^b = b^a$ ,  $A$  et  $B$  sont alignés avec  $O$  et que  $a < e$ .
3. Trouver tous les couples d'entiers naturels  $(a, b)$  tels que

$$a < b \quad \text{et} \quad a^b = b^a.$$

### PROBLÈME

**12 points**

Soit  $E$  un plan vectoriel euclidien orienté,  $(\vec{i}, \vec{j})$  une base de  $E$  orthonormée directe,  $I_E$  l'application identité de  $E$  et  $r$  la rotation vectorielle de  $E$  qui transforme  $\vec{i}$  en  $\vec{j}$ .

Dans le plan affine euclidien  $\mathcal{E}$  associé à  $E$ , muni d'un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , on donne les points  $A(1; 0)$  et  $B(-1; 0)$  et les cercles  $a$  et  $b$  passant par  $O$  de centres respectifs  $A$  et  $B$ .

Dans tout le problème on associe à chaque point  $P$  du cercle  $a$  le point  $Q$  du cercle  $b$  tel que les angles  $(\vec{i}, \overrightarrow{AP})$  et  $(\vec{j}, \overrightarrow{BQ})$  soient égaux. On notera  $M$  le milieu du segment  $[PQ]$ .

#### Partie I

1. Montrer que :  $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ})$  et que le vecteur  $\overrightarrow{OM}$  se déduit du vecteur  $\overrightarrow{AP}$  par l'application linéaire :  $\sigma = \frac{1}{2}(I_E + r)$ .

Former la matrice de  $\sigma$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$  et reconnaître que  $\sigma$  est la composée d'une homothétie vectorielle et d'une rotation vectorielle.

2. Démontrer que, quel que soit le point P sur le cercle  $a$ , le point  $M$  s'en déduit par une similitude directe fixe dont on donnera le centre, le rapport et l'angle.

Étudier l'ensemble des points  $M$  associés aux points P du cercle  $a$ .

### Partie II

Soit  $\theta$  une détermination de la mesure de l'angle  $(\vec{i}, \overrightarrow{AP})$ .

Calculer en fonction de  $\theta$  les coordonnées  $(x; y)$ ,  $(x'; y')$ ,  $(X; Y)$  des points P, Q, M.

Puis calculer  $X$  et  $Y$  en fonction de  $x$  et  $y$ . Retrouver les résultats de la question I 2.

### Partie III

Étudier l'ensemble  $S$  des distances PQ associées aux points P de cercle  $a$ . Démontrer que  $S$  est un intervalle fermé dont on donnera les bornes.

### Partie IV

Étudier l'ensemble  $T$  des coefficients directeurs des droites (PQ) associées aux points P du cercle  $a$ .

Démontrer que  $T$  est un intervalle fermé dont on donnera les bornes.

### Partie V

Soit K un point fixe de  $\mathcal{E}$  et  $k$  le nombre de droites (PQ) passant par K.

1. Quel est l'ensemble des nombres  $k$  ainsi associés aux points K de E?
2. Déterminer l'ensemble des points K de E pour lesquels  $k = 1$ .

**N. B.** Les parties III, IV et V sont indépendantes les unes des autres.

Les parties III et IV peuvent être étudiées géométriquement ou par le calcul.