

œ Baccalauréat C Aix-Marseille¹ juin 1981 œ

EXERCICE 1

Le but de cet exercice est de démontrer par l'absurde qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4n - 1$, où n est un élément de \mathbb{N}^* (ensemble des entiers naturels non nuls).

1. Soit E l'ensemble des nombres premiers de la forme $4n - 1$, où n est élément de \mathbb{N}^* .
Montrer que E a au moins deux éléments.
2. On suppose E fini. Soit P le produit de tous les éléments de E et $X = 4P - 1$.
 - a. Trouver un minorant de X .
 - b. Montrer que X n'est pas divisible par 2, et en déduire que tout facteur premier de X est soit de la forme $4n + 1$, soit de la forme $4n - 1$ où n est un élément de \mathbb{N}^* .
 - c. Montrer que X possède au moins un facteur premier de la forme $4n - 1$ où n est un élément de \mathbb{N}^* .
3. En considérant un facteur premier p de X de la forme $4n - 1$, la définition de P et la relation $X = 4P - 1$, achever la démonstration par l'absurde.

EXERCICE 2

Dans un plan affine P rapporté au repère cartésien $(O; \vec{i}, \vec{j})$, soit A et B les points de coordonnées respectives $(-1; 0)$ et $(0; 1)$, et soit t un nombre réel non nul.

On désigne par f, g, h les homothéties de rapport t et de centres respectifs O, A, B .

À tout point M du plan P , on fait correspondre successivement les points : $M_1 = f(M)$, $M_2 = g(M_1)$, $M_3 = h(M_2)$ et $M_4 = f(M_3)$.

1. Représenter sur un même figure les points M_1, M_2, M_3, M_4 dans le cas où $t = 2$ et $\vec{OM} = \vec{i} + \vec{j}$. (On pourra donner aux représentations de \vec{i} et \vec{j} la longueur 0,5 cm).
2. Exprimer le vecteur \vec{OM}_4 en fonction de t et des vecteurs \vec{i} et \vec{j} .
3. Soit φ_t l'application du plan P dans lui-même définie par :

$$\text{pour tout point } M \text{ de } P, \quad \varphi_t(M) = f \circ h \circ g \circ f(M).$$

Déterminer suivant les valeurs de t l'ensemble des points de P invariants par φ_t et préciser dans chaque cas la nature de φ_t .

PROBLÈME

On notera \mathbb{N} l'ensemble des entiers naturels, \mathbb{N}^* l'ensemble des entiers naturels non nuls, \mathbb{N}' l'ensemble des entiers naturels privés des nombres 0 et 1.

Partie A

1. Nice - Corse - Montpellier - Toulouse

On considère les suites u et v définies sur \mathbb{N}^* par

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = 1 \\ v_1 = 1 \end{array} \right. \text{ et, pour tout } n, \text{ élément de } \mathbb{N}' \left\{ \begin{array}{l} u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \\ v_n = 1 + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} \end{array} \right.$$

1. Trouver deux réels A et B tels que, pour tout n , élément de \mathbb{N}'

$$\frac{1}{(n-1)n} = \frac{A}{n-1} + \frac{B}{n}.$$

En déduire que, pour tout n , élément de \mathbb{N}' ,

$$v_n = 2 - \frac{1}{n}.$$

2. Montrer que la suite u est croissante, que, pour tout n , élément de \mathbb{N}' : $u_n \leq v_n$, que la suite u est majorée.

Partie B

On rappelle que si q est un nombre complexe différent de 1 et n un élément de \mathbb{N}

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

1. Soit t un élément de $]0; \pi[$; on pose pour n , élément de \mathbb{N}'

$$C_n(t) = \sum_{k=1}^n \cos kt \quad \text{et} \quad S_n(t) = \sum_{k=1}^n \sin kt.$$

a. Calculer le nombre complexe $C_n(t) + iS_n(t)$.

En déduire que si t est un élément de $]0; \pi[$

$$C_n(t) = \frac{\sin \frac{nt}{2} \cos \frac{n+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}}$$

et si $t = 0$, $C_n(0) = n$.

b. L'application C_n de $]0; \pi[$ dans \mathbb{R} est-elle continue sur $]0; \pi[$.

2. Vérifier que pour tout t , élément de $]0; \pi[$:

$$1 + 2C_n(t) = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}}$$

et montrer que l'application de $]0; \pi[$ dans \mathbb{R} qui à t associe $\frac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}}$ peut être prolongée en une fonction g_n continue sur $]0; \pi[$.

3. Montrer que pour tout n , élément de \mathbb{N}^* ,

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos nt \, dt = \frac{1}{n^2}.$$

En déduire que

$$u_n = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) C_n(t) \, dt.$$

4. Vérifier que

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi} \right) dt = \frac{\pi^2}{6}.$$

et que, pour tout n , élément de \mathbb{N}^* :

$$\frac{\pi^2}{6} - u_n = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi} \right) g_n(t) \, dt.$$

Partie C

On considère la fonction numérique f définie sur $[0; \pi]$ par $f(0) = 2$ et pour tout t , élément de $]0; \pi]$

$$f(t) = \frac{t - \frac{t^2}{2\pi}}{\sin \frac{t}{2}}.$$

1. Montrer que f est continue sur $[0; \pi]$; en déduire l'existence d'un réel M tel que, pour tout t , élément de $[0; \pi]$:

$$0 \leq f(t) \leq M.$$

2. Soit α un réel fixé tel que $0 < \alpha < \pi$.

a. Montrer que, pour tout n , élément de \mathbb{N} ,

$$\left| \int_0^\alpha f(t) \sin \frac{2n+1}{2} t \, dt \right| \leq \alpha M.$$

b. Montrer que f est dérivable sur $[\alpha; \pi]$ et que la fonction dérivée f' est continue sur ce segment.

En déduire l'existence d'un réel M' tel que, pour tout t , élément de $[\alpha; \pi]$ $f'(t) \leq M'$.

c. On pose, pour tout n , élément de \mathbb{N} ,

$$I_n = \int_\alpha^\pi f(t) \sin \frac{2n+1}{2} t \, dt.$$

Montrer en utilisant une intégration par parties, que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

3. Dédurre de la question C 2. que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{\pi^2}{6}.$$