

∞ Baccalauréat C groupe 4¹ juin 1984 ∞

EXERCICE 1

4 POINTS

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace E.

On désigne par :

- R_1 la rotation d'axe Oz orienté par \vec{k} , et d'angle $\frac{\pi}{6}$
- R_2 la rotation d'axe Oz orienté par \vec{k} , et d'angle $\frac{5\pi}{6}$
- T_1 la translation de vecteur $\left(\frac{1}{2}\vec{k}\right)$
- T_2 la translation de vecteur $\left(-2\vec{k}\right)$

On considère les vissages : $V_1 = R_1 \circ T_1 = T_1 \circ R_1$ et $V_2 = R_2 \circ T_2 = T_2 \circ R_2$.

1. Étant donné un point M quelconque de E, calculer en fonction des coordonnées $(x; y; z)$ de M les coordonnées des points suivants :

$$V_1(M), V_2(M), V_1 \circ V_2(M), V_2 \circ V_1(M).$$

2. Caractériser les transformations $V_1 \circ V_2$ et $V_2 \circ V_1$, et expliquer sans calculs les résultats obtenus.

EXERCICE 2

4 POINTS

Dans le plan P muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on définit les trois points :

$$A(1; 0) \quad ; \quad B\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right) \quad ; \quad C\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$$

et la droite D dont une équation est : $x = 1$.

1. Déterminer les coordonnées du point G tel que $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB}$.
Quelle est la nature du quadrilatère (A, B, G, C) ?
2. On note (Γ) l'ensemble des points M de P, de coordonnées $(x; y)$, qui vérifient la relation :

$$-MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2(x-1)^2.$$

- a. Montrer que B et C appartiennent à (Γ) .
- b. Montrer que (Γ) est l'ensemble des points M de P tels que :

$$MG = \sqrt{2}d(M, D)$$

où $d(M, D)$ désigne la distance de M à la droite D .

- c. En déduire la nature de (Γ) et préciser ses éléments remarquables. Représenter (Γ) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

PROBLÈME**12 POINTS****N.B. : Il n'est pas nécessaire d'avoir traité la partie A pour aborder la suite.**

Soit P un plan affine euclidien orienté rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$; les points de P sont repérés, soit par leurs coordonnées $(x; y)$, soit par leur affixe $x + iy$.

Le but du problème est l'étude de l'ensemble (Γ) des points $M(t)$, $t \in \mathbb{R}$, du plan P , de coordonnées $(x(t); y(t))$ telles que :

$$\begin{cases} x(t) = e^t \cos t \\ y(t) = e^t \sin t. \end{cases}$$

Partie A

1. a. Vérifier, pour tout réel t , les relations :

$$\cos t - \sin t = \sqrt{2} \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$

et

$$\cos t + \sin t = \sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right).$$

- b. Étudier les variations des fonctions $x : t \mapsto x(t)$ et $y : t \mapsto y(t)$ sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
- c. Tracer dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la portion de (Γ) , ensemble des points $M(t)$ lorsque t décrit $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
(on aura soin, en particulier, de représenter les points $M(0)$, $M(\pi/4)$, $M(\pi/2)$ et les tangentes à (Γ) en ces points.)

2. Calculer, pour tout réel t :

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OM}; \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}\right) \quad \text{et} \quad \sin\left(\widehat{\overrightarrow{OM}; \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}\right).$$

En déduire que l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OM}; \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}\right)$ est constant et en donner une mesure.

3. On pose, pour tout réel a et b , $L_a^b = \int_a^b \left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right\| dt$.

Donner l'expression $L_0^{\frac{\pi}{2}}$ et en calculer une valeur approchée à 10^{-2} près.

Étudier la limite éventuelle de L_t^0 lorsque t tend vers $-\infty$.

Partie B

1. Montrer que les fonctions x et y sont des solutions sur \mathbb{R} d'une même équation différentielle linéaire et homogène du second ordre à coefficients constants.

2. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation différentielle :

$$X'' - 2X' + 2X = 0.$$

Partie C

1. Pour tout réel t , on note f_t l'application de P dans P qui, au point M d'affixe Z fait correspondre le point M_1 d'affixe Z_1 telle que $Z_1 = z(t)Z$, où $z(t)$ est l'affixe du point $M(t)$ défini dans la partie A.

a. Préciser la nature de f_t et ses éléments remarquables.

b. Montrer que, pour tout t et t' réels, $f_t \circ f_{t'} = f_{t+t'}$.

Soit G l'ensemble des applications f_t , $t \in \mathbb{R}$. Montrer que (G, \circ) est un groupe commutatif des transformations du plan P .

2. a. Montrer que, pour tout t et t_1 réels, $f_t(M(t_1)) = M(t + t_1)$. En déduire que, pour tout réel t , $f_t(\Gamma) = \Gamma$.

b. Montrer que, si $M_1 = M(t_1)$ est un point quelconque de (Γ) , l'ensemble : $\{f_t(M_1), t \in \mathbb{R}\}$ est égal à (Γ) .

Partie D

Soit t un réel fixé non nul. On note A_0 le point $M(0)$ et on définit les points $A_n (n \in \mathbb{N}^*)$ par la relation de récurrence :

$$A_n = f_t(A_{n-1}) \text{ si } n \geq 1.$$

1. a. Calculer en fonction de t la longueur A_0A_1 .

b. Montrer que la suite $(A_{n-1}A_n)$ des longueurs $A_{n-1}A_n$ est une suite géométrique.

c. En déduire une expression de :

$$L_n(t) = A_0A_1 + A_1A_2 + \dots + A_{n-1}A_n \text{ en fonction de } n \text{ et } t.$$

2. On suppose $t < 0$. Montrer l'existence de $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n(t)$ et calculer sa valeur $L(t)$.

$$\text{Montrer que } \frac{e^{2t} - 2e^t \cos t + 1}{(1 - e^t)^2} = 1 + 2e^t \frac{1 - \cos t}{(1 - e^t)^2}.$$

En déduire la limite de $L(t)$ lorsque t tend vers zéro par valeurs négatives. Comparer ce résultat à la limite de L_t^0 trouvée au A 3.