

∞ Baccalauréat C Aix–Marseille<sup>1</sup> septembre 1972 ∞

**EXERCICE 1**

**4 POINTS**

1. Démontrer que, pour tout nombre réel  $x$ , on a

$$-1 < \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} < 1$$

Étudier la fonction numérique  $f$ , qui est une application, de  $\mathbb{R}$  dans  $] -1 ; +1[$ , définie par

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

Construire sa courbe dans un repère orthonormé.

2. Démontrer que  $f$  est une bijection; pour  $x$  donné dans  $] -1 ; +1[$ , calculer  $f^{-1}(x)$ .

**EXERCICE 2**

**4 POINTS**

1.  $u$  désigne un nombre complexe différent de  $-1$ , de module 1 et d'argument  $\theta$ .

Calculer le module et l'argument du nombre complexe  $\frac{1-u}{1+u}$ . En déduire le module et l'argument du nombre complexe  $z$  tel que

$$\frac{2+iz}{2-iz} = u.$$

2. Résoudre, dans le corps des complexes, l'équation

$$(2+iz)^5 = (2-iz)^5.$$

**PROBLÈME**

**4 POINTS**

**Partie A**

Soit  $(E)$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  et  $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  une base de  $(E)$  dans laquelle seront définies les coordonnées de tous les vecteurs de  $(E)$ . On considère l'application  $f$  de  $(E)$  dans lui-même qui, à  $\vec{V}(x; y; z)$ , fait correspondre  $\vec{V}'(x'; y'; z')$  tel que

$$\begin{cases} x' &= x, \\ y' &= x + y, \\ z' &= y + z. \end{cases}$$

1. Démontrer que  $f$  est une application linéaire bijective de  $(E)$  sur lui-même. Quel est l'ensemble des vecteurs de  $(E)$  invariants par  $f$ ?

---

1. Montpellier, Nice

2. Soit  $\vec{U}(x_0; y_0; z_0)$  un vecteur quelconque de (E) et  $(\vec{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite dans (E) telle que

$$\begin{cases} \vec{V}_0 = \vec{U} \text{ et} \\ \vec{V}_n = f(\vec{V}_{n-1}), \forall n \geq 1. \end{cases}$$

Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ , les coordonnées  $(x_n; y_n; z_n)$  de  $\vec{V}_n$  dans la base  $\mathcal{B}$  sont

$$\begin{cases} x_n = x_0, \\ y_n = nx_0 + y_0, \\ z_n = \frac{n(n-1)}{2}x_0 + ny_0 + z_0 \end{cases}$$

### Partie B

Soit  $(\mathcal{E})$  un espace affine associé à (E) et  $\mathcal{R} = (\text{O}; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère cartésien de  $(\mathcal{E})$ . Pour tout entier naturel  $n$ , on désigne par  $M_n$  le point de  $(\mathcal{E})$  dont les coordonnées dans  $\mathcal{R}$  sont celles de  $\vec{V}_n$  dans  $\mathcal{B}$ . On suppose que  $M_0$  est fixé.

1.
  - a. Lorsque  $x_0 = y_0 = 0$ , comment les points  $M_n$  sont-ils disposés?
  - b. Même question lorsque  $x_0 = 0$  et  $y_0 \neq 0$ .
  - c. Lorsque  $x_0 \neq 0$ , démontrer que tous les points  $M_n$  sont situés dans un même plan (P) et appartiennent à une parabole ( $\Gamma$ ), dont on formera l'équation dans le repère cartésien  $(M_0, \vec{j}, \vec{k})$ .
2. On suppose que  $x_0 = 2$ ,  $y_0 = 0$ ,  $z_0 = 0$  et que le repère  $\mathcal{R}$  est orthonormé.
  - a. Que devient l'équation de ( $\Gamma$ )?  
Construire dans le plan (P) la parabole ( $\Gamma$ ) et marquer les points  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$ .
  - b. Démontrer que les milieux des segments  $[M_n M_{n+1}]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , appartiennent à une même parabole, ( $\Gamma'$ ), et que ( $\Gamma'$ ) est tangente à ces différents segments.