

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Aix-Marseille septembre 1975 ∞

EXERCICE 1

Soit n un entier naturel. Déterminer suivant les valeurs de n le reste de la division par 7 de 3^n .

En déduire le reste de la division par 7 de 3^{123} .

Déterminer le chiffre x des unités pour que $3^{123} + \overline{197x}$ soit divisible par 7.

($\overline{197x}$ est l'écriture dans le système décimal d'un nombre de 4 chiffres).

EXERCICE 2

Log désigne la fonction « logarithme népérien ».

1. Soit f la fonction numérique de la variable réelle x , définie par

$$f(x) = x^2 + 1 - \text{Log } x.$$

Déterminer le domaine maximum de définition de f .

Calculer $f'(x)$. Étudier les variations de f (on ne demande pas d'en représenter le graphe).

2. Soit g la fonction numérique de la variable réelle x , définie par

$$g(x) = x - 1 + \frac{\text{Log } x}{x}.$$

Déterminer le domaine maximum de définition de g .

Étudier les variations de g . Tracer la courbe représentative de g dans un repère orthonormé.

Calculer dans ce repère l'aire de l'ensemble des points dont les coordonnées $(x ; y)$ vérifient

$$1 \leq x \leq e, \quad x - 1 \leq y \leq g(x).$$

PROBLÈME

Soit (\vec{i}, \vec{j}) une base d'un espace vectoriel X (espace vectoriel sur \mathbb{R}). On donne dans X deux vecteurs linéairement indépendants $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$, $\vec{v} = a'\vec{i} + b'\vec{j}$.

Soit Δ , la droite vectorielle de base $\{\vec{u}\}$ et Δ' la droite vectorielle de base $\{\vec{v}\}$

Partie A

1. Montrer que la matrice dans la base (\vec{i}, \vec{j}) de la symétrie vectorielle S par rapport à Δ , et de direction Δ' , est de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}$.

Calculer α, β, γ en fonction de a, b, a', b' et vérifier que $\alpha^2 + \beta\gamma = 1$.

2. Montrer que toute application linéaire de X dans lui-même dont la matrice dans la base (\vec{i}, \vec{j}) est la forme $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}$ vérifiant $\alpha^2 + \beta\gamma = 1$ est une symétrie vectorielle dont on précisera les éléments géométriques.
3. Soit P un plan affine associé à X , dont $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère. On définit une application affine $s : P \rightarrow P$ associant au point de coordonnées $(x; y)$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ le point de coordonnées $(x'; y')$ dans ce même repère de sorte que :

$$\begin{cases} x' = 3x + 4y + m \\ y' = -2x - 3y + m' \end{cases}$$

Déterminer m' en fonction de m pour que s soit une symétrie dont on déterminera l'axe et la direction.

Partie B

Dans cette partie (indépendante de la précédente) on suppose X euclidien, (\vec{i}, \vec{j}) orthonormée.

On posera $\|\vec{v}\| = r$, $\|\vec{v}'\| = r'$, $\cos(\vec{v}, \vec{v}') = z$.

1. Soit φ l'endomorphisme de X dont la matrice dans la base (\vec{v}, \vec{v}') est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer les couples $(\vec{v}; \vec{v}')$ tels que $\|\varphi(\vec{v})\| = \|\vec{v}\|$ et $\|\varphi(\vec{v}')\| = \|\vec{v}'\|$.

Montrer que ce problème admet une infinité de solutions.

En choisissant \vec{v} arbitrairement on trouve deux vecteurs \vec{v}'_1 et \vec{v}'_2 tels que $(\vec{v}; \vec{v}'_1)$ et $(\vec{v}; \vec{v}'_2)$ soient solutions du problème.

Obtenir \vec{v}'_1 et \vec{v}'_2 à partir de \vec{v} par composition d'une rotation vectorielle et d'une homothétie vectorielle.

2. Calculer les coordonnées $(a'_1; b'_1)$ de \vec{v}'_1 et $(a'_2; b'_2)$ de \vec{v}'_2 en fonction de a et b , coordonnées du vecteur \vec{v} .
3. Montrer que si la matrice de φ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ dans l'une ou l'autre des bases $(\vec{v}; \vec{v}'_1), (\vec{v}; \vec{v}'_2)$, φ est une rotation vectorielle; on comparera les deux rotations vectorielles ainsi identifiées.
4. Montrer que si $\psi : X \rightarrow X$ est une rotation vectorielle, sa matrice dans toute base (\vec{e}_1, \vec{e}_2) est de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}$ avec $|\alpha + \delta| \leq 2$ et $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, et que, θ étant une détermination de la mesure de l'angle de la rotation, $\cos \theta = \frac{\alpha + \delta}{2}$.

On pourra rechercher la matrice ψ dans la base $\left(\frac{\vec{e}_1}{\|\vec{e}_1\|}, \frac{\vec{e}_2}{\|\vec{e}_2\|} \right)$ puis dans une base orthonormée $\left(\frac{\vec{e}_1}{\|\vec{e}_1\|}, \vec{e}_3 \right)$.