

∞ **Baccalauréat C Aix-Marseille septembre 1985** ¹ ∞

EXERCICE 1

6 POINTS

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit \mathbb{C}_1 l'ensemble $\mathbb{C} - \{-i, i\}$ et f l'application telle que

$$\forall z \in \mathbb{C}_1 \quad f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}.$$

1. Résoudre l'équation : $f(z) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

2. a. Montrer que

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}_1 \times \mathbb{C}_1, \quad f(z) = f(z') \iff z = z' \text{ ou } zz' = 1.$$

b. Soit $(z, z') \in \mathbb{C}_1 \times \mathbb{C}_1$ tel que

$$|z| < 1 \quad \text{et} \quad |z'| < 1;$$

montrer que

$$f(z) = f(z') \Rightarrow z = z'.$$

3. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $z \in \mathbb{C}_1$ et $f(z)$ soit réel.

4. Dans cette question, $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [-\pi; \pi[- \left\{ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\}$.

a. Montrer que $f(z)$ est réel, et le calculer en fonction de $\cos \theta$.

b. Soit u la suite réelle telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 1 + f(z) + (f(z))^2 + \dots + (f(z))^n.$$

Pour quelles valeurs de θ cette suite converge-t-elle?

EXERCICE 2

4 POINTS

Soit dans le plan P , orienté, un triangle OAB tel que l'angle (\vec{OA}, \vec{OB}) ait pour mesure $\frac{\pi}{3}$.

1. Soit S une similitude directe transformant A en B , et la droite (OA) en la droite (OB) .
Montrer que S a un centre Ω qui appartient au cercle \mathcal{C} , circonscrit au triangle OAB .

2. Réciproquement, montrer que tout point Ω' de \mathcal{C} , distinct de A et de B , est le centre d'une similitude directe transformant A en B et (OA) en (OB) .

3. Donner une construction géométrique simple des centres des rotations transformant A en B et (OA) en (OB) .

PROBLÈME**10 POINTS**

Le plan P est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 4 cm).
 g est l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

A.

- Étudier les variations de g ; tracer \mathcal{C} sa courbe représentative et préciser la droite asymptote.
- Dans le problème tan désigne la bijection de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ dans \mathbb{R} telle que :

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[, \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Exprimer simplement $(g \circ \tan)(x)$. Retrouver alors les extremums de g et préciser les antécédents correspondants.

- Δ_α est l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq \alpha \\ 0 \leq y \leq g(x) \end{cases} \quad \alpha \in]1; +\infty[, \text{ réel donné}$$

Calculer A_α , l'aire de Δ_α . Déterminer $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A_\alpha$, puis $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{A_\alpha}{\alpha}$.

B.

Soit u la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = g(u_n)$.

- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
En déduire que u est strictement décroissante.
- Montrer que u converge, puis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

C.

Soit G et H les applications de $]1; +\infty[$ dans \mathbb{R} , telles que

$$\forall x \in]1; +\infty[, \quad G(x) = \int_0^x g(t) dt \text{ et } H(x) = \int_1^x G(t) dt.$$

- Exprimer $G(x)$. Sans chercher à calculer $H(x)$, étudier les variations de H sur $]1; +\infty[$.
- On pose, pour $x \in]1; +\infty[, L(x) = \int_1^x \ln t dt$. (La notation \ln désigne le logarithme népérien).
 - Montrer que :

$$\forall x \in]1; +\infty[, \quad H(x) - L(x) = \frac{1}{2} \int_1^x \ln \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) dt.$$

b. Justifier

$$\forall X \in \mathbb{R}_+ \quad \ln(1+x) \leq X.$$

En déduire

$$\forall x \in [1; +\infty[, \quad H(x) - L(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2x}.$$

c. Montrer que $x \mapsto H(x) - L(x)$ admet une limite finie, ℓ , lorsque x tend vers $+\infty$.

3. Soit \tan^{-1} la fonction réciproque de \tan définie en 2.

a. Justifier la dérivabilité de \tan^{-1} en tout point et montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\tan^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

b. Calculer $H(x) - L(x)$ au moyen d'une intégration par parties.

c. Donner la valeur de ℓ (on admet : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tan^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$).