

## ∞ Baccalauréat C Aix-en-Provence septembre 1977 ∞

### EXERCICE 1

3 POINTS

1. Déterminer tous les couples  $(u, v)$  d'entiers relatifs vérifiant

$$5u - 3v = 0.$$

2. En déduire les couples  $(p, q)$  d'entiers relatifs solutions de l'équation

$$5p - 3q = 1$$

3. Résoudre le système

$$x \in \mathbb{Z} \quad \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{5} \\ x \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

### EXERCICE 2

5 POINTS

Soit  $P$  un plan affine euclidien et  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthonormé de  $P$ .

Soit la fonction de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$

$$f: x \mapsto \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{1+x}{1-x}.$$

1. Montrer que  $f$  est une fonction impaire. Étudier les variations de  $f$  et montrer que  $f$  définit une bijection de  $] -1; +1[$  sur  $\mathbb{R}$ .

Tracer la courbe représentative de  $f$  dans  $P$ .

2. Soit  $g$  la fonction réciproque de  $f$ ; quelles propriétés (ensemble de définition, sens de variation, continuité) de la fonction  $g$  peut-on déduire de l'étude de la fonction  $f$ .

Montrer que  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que  $g' = 1 - g^2$

3. Calculer

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-t^2} dt \quad \int_0^{\operatorname{Log} \sqrt{3}} (1-g^2(t)) dt.$$

### PROBLÈME

12 POINTS

#### Partie A

Soit  $P$  le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

On considère l'application

$$F: \mathbb{R}^* \rightarrow P \\ t \mapsto m$$

telle que si  $x$  et  $y$  désignent les coordonnées de  $m$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ,

$$x = 2 \left( t + \frac{1}{t} \right) \quad \text{et} \quad y = t - \frac{1}{t}.$$

1. Soit  $H$  l'hyperbole d'équation  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$ .  
 Montrer que  $F(\mathbb{R}^*) = H$  (on pourra poser  $X = \frac{x}{4} + \frac{y}{2}$ ).  
 Soient  $t$  et  $t'$  deux réels non nuls tels que  $F(t) = m$  et  $F(t') = m'$ . Calculer en fonction de  $t' - t$  et de  $tt'$  les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{mm'} = \overrightarrow{F(t)F(t')}$ .  
 En déduire que  $F$  est bijective.  
 On désigne par  $H_1$  l'intersection de  $H$  avec le demi-plan d'équation  $x > 0$ ; montrer que  $F(\mathbb{R}_+^*) = H_1$ , où  $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ - \{0\}$ .
2. Déterminer les deux premières dérivées  $\vec{V}$  et  $\vec{\Gamma}$  de l'application  $F$ ; montrer que  $\vec{\Gamma}$  a une direction fixe.
3. Tracer  $H_1$  (on prendra  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2$  cm).  
 Placer les points  $A = F(1)$ ,  $m_2 = F(2)$ ,  $m_3 = F(3)$  et  $B = F(-1)$ .

### Partie B

Soient  $m(x; y)$  et  $m'(x'; y')$  deux points de  $H$ ; on considère le point  $M(X; Y)$  défini par

$$X = \frac{xx'}{4} + y'y \quad \text{et} \quad Y = \frac{xy' + x'y}{4}$$

1. Calculer  $\left(\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4}\right)\left(\frac{x'^2}{16} - \frac{y'^2}{4}\right)$ ; montrer que  $M$  appartient à  $H$ .  
 On note  $M = m \star m'$ . La loi  $\star$  est donc une loi de composition interne pour  $H$ .  
 Montrer que :
- $$\forall (t; t') \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*, F(t) \star F(t') = F(tt').$$
- En déduire que  $F$  est un isomorphisme de  $(\mathbb{R}^*, \times)$  sur  $(H, \star)$ .
2. En déduire que  $(H, \star)$  est un groupe commutatif.  
 Préciser l'élément neutre. Que représente  $\overline{m} = F\left(\frac{1}{t}\right)$ .
3. a. On suppose  $m' \neq m$ ,  $m' \neq \overline{m}$ , et  $M = m \star m'$ . En utilisant le A 1. montrer que la droite  $(mm')$  est parallèle à la droite  $(AM)$ .  
 b. On suppose  $m' = \overline{m}$ ; Montrer que la droite  $(m\overline{m})$  est parallèle à la tangente en  $A$  à  $H$ .  
 c. On suppose que  $M = m \star m$ ,  $m \neq A$  et  $m \neq B$ ; Montrer que la droite  $(AM)$  est parallèle à la tangente en  $m$  à  $H$ .  
 d. On reprend les notations du A 3. De plus, on pose

$$m_4 = F(4), \quad \overline{m}_3 = F\left(\frac{1}{3}\right) \quad \text{et} \quad m_{4/3} = F\left(\frac{4}{3}\right).$$

Montrer que  $m_4 = m_2 \star m_2$ , et  $m_{4/3} = m_4 \star m_3$ . Construire géométriquement  $m_4$ , puis  $m_3$ , puis  $\overline{m}_{4/3}$ .

- e. Soient trois points  $m, n, p$  de  $H$  tels que  $m \star n = q$  et  $n \star p = r$ .  
 Montrer que, si  $p \neq q$  et  $m \neq r$ , les droites  $(mr)$  et  $(pq)$  sont parallèles.  
 [Il est conseillé de calculer  $(m \star n) \star p$  et  $m \star (n \star p)$ ].

### Partie C

Soit  $C \in H$  et soit l'application  $\Phi$  :

$$\begin{array}{ccc} H & \rightarrow & H \\ m & \mapsto & \overline{m} \star C \end{array}$$

On suppose que  $m = F(t)$  et  $C = F(e)$ ,  $e$  réel différent de 1.

- Démontrer que  $m$  est invariant par  $\Phi$  si et seulement si  $t^2 = c$ . En déduire que si  $C$  appartient à  $H_1$ ,  $\Phi$  admet deux points invariants  $U$  et  $V$ . (on appellera  $U$  celui de ces deux points qui est situé sur  $H_1$ ). Montrer qu'alors  $H$  admet deux tangentes parallèles à la droite  $(AC)$  et que pour  $m$  distinct de  $U$  et  $V$ , la droite  $(m\Phi(m))$  est parallèle à  $(AC)$ .
- Application :** soit  $C = F(4) = m_4$ .  
 Déterminer  $U, V$  et  $\Phi(m_3)$ . Vérifier que la tangente en  $U$  à  $H$  est parallèle à  $(AC)$ .