

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C septembre 1981 Aix-en-Provence ∞

EXERCICE 1

Soit E un espace affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit f l'application de E dans E qui, au point M de coordonnées $(x; y; z)$, associe le point M' de coordonnées $(x'; y'; z')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{4}{3} \\ y' = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z + \frac{4}{3} \\ z' = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z + \frac{10}{3} \end{cases}$$

1. Existe-t-il des points invariants par f ?
2. Démontrer que l'endomorphisme \llcorner associé à f est une symétrie vectorielle orthogonale par rapport à une droite vectorielle que l'on déterminera.
3. En déduire que f est un vissage dont on déterminera les éléments (axe, vecteur, angle).

EXERCICE 2

La fonction f est définie sur $]0; \pi[$ par

$$f(x) = \frac{1}{\sin x}.$$

1. Étudier les variations de f et représenter la courbe d'équation $y = f(x)$ dans un repère orthonormé.
2. a. Montrer que la restriction g de f à $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right[$ possède une application réciproque g^{-1} . On précisera l'ensemble de définition de g^{-1} .
b. Montrer que la fonction g^{-1} est dérivable sur un ensemble que l'on précisera. Calculer la fonction dérivée.
3. Calculer, en se servant des résultats précédents, l'intégrale définie

$$J = \int_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}} dt.$$

PROBLÈME

La notation Log désigne le logarithme népérien, e est la base du logarithme népérien, et, si n est un entier naturel et x un réel strictement positif, $\text{Log}^n x$ est la puissance d'exposant n du logarithme népérien de x .

On admettra que, pour tout entier n ,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x \operatorname{Log}^n x) = 0.$$

Partie A

1. Pour tout entier naturel n , montrer qu'on peut définir une application I_n de $]0; +\infty[$ dans \mathbb{R} par

$$I_n(x) = \int_x^e \operatorname{Log}^n t \, dt.$$

Calculer $I_0(x)$.

Démontrer que, pour tout n supérieur ou égal à 1,

$$I_n(x) = e - x \operatorname{Log}^n x - n I_{n-1}(x).$$

En déduire $I_1(x)$ et $I_2(x)$.

2. On pose, pour tout entier naturel n ,

$$J_n = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} I_n(x)$$

si cette limite existe.

Montrer que J_0 existe et la calculer.

Montrer par récurrence que J_n existe pour tout n . Déterminer une relation liant J_n et J_{n-1} pour tout n entier naturel non nul.

Calculer J_1, J_2, J_3, J_4 .

Application : $(a; b)$ étant un couple de nombres réels, calculer

$$S(a; b) = \frac{1}{e} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left[\int_x^e (a \operatorname{Log}^2 t + b \operatorname{Log} t)^2 \, dt \right].$$

Vérifier que, pour tout $(a; b)$ dans \mathbb{R}^2 ,

$$S(a; b) = S\left(\frac{2a-b}{\sqrt{5}}; \frac{9a-2b}{\sqrt{5}}\right).$$

Partie B

1. On désigne par E l'ensemble des applications de $]0; +\infty[$ dans \mathbb{R} . On rappelle que E , muni de l'addition et de la multiplication par un réel, est un espace vectoriel.

Pour tout couple $(a; b)$ de nombres réels, on désigne par $f_{a; b}$ l'élément de E tel que

$$f_{a; b}(x) = a \operatorname{Log}^2 x + b \operatorname{Log} x.$$

Soit F l'ensemble des applications $f_{a;b}$ pour $(a; b)$ dans \mathbb{R}^2 .

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .

Démontrer que $B = (f_{1;0}, f_{0;1})$ est une base de F . Calculer les coordonnées de $f_{a;b}$ dans B .

2. Étudier les applications $f_{1;0}$ et $f_{0;1}$ et en faire la représentation graphique dans un même plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé. Cette représentation met en évidence un domaine plan fermé délimité par un arc de chacune des courbes représentatives de $f_{1;0}$ et $f_{0;1}$ et inclus dans la bande $1 \leq x \leq e$.
Calculer l'aire de ce domaine.

Partie C

Soit g l'application de F dans F telle que

$$g(f_{a;b}) = f_{\frac{2a-b}{\sqrt{5}}; \frac{9a-2b}{\sqrt{5}}}.$$

Montrer que g est linéaire et déterminer sa matrice A dans la base B . Calculer A^2, A^3, A^4 ?
En déduire que g est bijective et donner la matrice de g^{-1} dans la base B .

Partie D

Montrer qu'on définit une application Φ de $F \times F$ dans \mathbb{R} par

$$\phi(f_{a;b}, f_{a';b'}) = \frac{1}{e} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left[\int_x^e f_{a;b}(x) \cdot f_{a';b'}(x) dx \right].$$

Démontrer que Φ est une forme bilinéaire symétrique sur $F \times F$.

Montrer que $\Phi(f_{a,b}, f_{a,b}) = S(a,b)$ et en déduire que Φ est un produit scalaire sur F .

On munit F de ce produit scalaire. Calculer $\|f_0\|$.

Déterminer $a > 0$ et b de sorte que $B' = (f_{a,b}, f_{0,1})$ soit une base orthonormée de F .

Caractériser l'endomorphisme g de l'espace vectoriel euclidien F .