Durée : 4 heures

Baccalauréat C 1985 Aix-Marseille[1]

EXERCICE 1 **5 points**

Calculer, à l'aide de deux intégrations par parties

$$I_k = \int_0^k x^2 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Étudier la limite de I_k quand k tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2 **5 points**

P est le plan orienté. On appelle « triangle équilatéral direct » tout triplet (A, B, C) de points de P vérifiant les deux propriétés suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{le triangle ABC est équilatéral}\\ \dfrac{\pi}{3} \text{ est une mesure en radians de l'angle } \left(\widehat{\overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AC}}}\right)\end{array}\right.$$

On se donne un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon R et une droite (D) ne coupant pas $(\mathscr{C})$.

1. Soit A un point de (D). On note (E_A) l'ensemble des points M de P vérifiant la propriété :
   « il existe un point N de $(\mathscr{C})$ tel que le triplet (A, M, N) soit un triangle équilatéral direct ».
   Montrer que (E_A) est un cercle dont on déterminera le centre Ω_A et le rayon R_A. Construire (E_A).
2. Quel est l'ensemble des points A lorsque A décrit (D) ? Construire cet ensemble.

PROBLÈME **10 points**

A.

1. Résoudre l'équation différentielle

$$X'' + 2X' + 2X = 0 \qquad (1)$$

   où X représente une fonction numérique de la variable réelle t définie sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer Les solutions f et g de (1) vérifiant :
   $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$
   $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$

B. Soit f la fonction numérique de la variable réelle t définie par :

$$f(t) = \mathrm{e}^{-t}\cos t.$$

1. Aix-Marseille, Montpellier, Corse, Nice

1. Montrer que, pour tout réel t : $-\mathrm{e}^{?t} \leqslant f(t) \leqslant \mathrm{e}^{?t}$. Qu'en déduit-on quant à la position relative des courbes représentatives $\mathscr{C}$, Γ, Γ' des fonctions

$$t \longmapsto f(t) \quad ; \quad t \longmapsto \mathrm{e}^{-t} \quad ; \quad t \longmapsto -\mathrm{e}^{-t}?$$

   Étudier la limite de f en $+\infty$.

2. Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$; vérifier que, pour tout réel t :

$$f'(t) = -\sqrt{2}\mathrm{e}^{-t}\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right).$$

   Dresser le tableau de variations de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ 2\pi\right]$.

3. Déterminer les points communs à $\mathscr{C}$ et Γ, à $\mathscr{C}$ et Γ'. Montrer qu'en ses points les tangentes aux deux courbes sont confondues.
4. Tracer les arcs des courbes $\mathscr{C}$, Γ, Γ' correspondant à $t \in \left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ 2\pi\right]$ dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unités : 2 cm en abscisses ; 16 cm en ordonnées).
5. Soit g la fonction numérique de la variable réelle t définie par

$$g(t) = \mathrm{e}^{-t}\sin t.$$

   Calculer $g(t)$ en fonction de $f\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$.
   Déduire le tableau de variations de g sur $[0\ ;\ 2\pi]$ du tableau de variations de f obtenu en B. 2.

C. Le plan P est rapporté à un nouveau repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{I},\ \vec{J}\right)$, orthonormé (unité : 16 cm).
À tout réel t on associe le point $M(t)$ d'affixe $z(t) = f(t) + \mathrm{i}g(t)$, et on note S l'ensemble des points $M(t)$ lorsque t décrit $\mathbb{R}$.
L'objet de cette partie est d'étudier quelques propriétés de S.

1. Pour tout entier naturel n, on note A_n le point $M\left(n\frac{\pi}{2}\right)$.
   a. Placer A_0, A_1, A_2, A_3 et la tangente en A_0 à S.
   b. Tracer l'arc $\widehat{A_0A_3}$ de S, correspondant aux réels $t \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$.
   Préciser les points de cet arc où les tangentes à S sont parallèles aux axes.
2. **a.** Déterminer, en fonction de t, le module et un argument de $z(t)$.
   b. Prouver qu'il existe une similitude directe de centre O, dont on précisera les éléments, telle que, pour tout réel t : $M\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$ soit l'image de $M(t)$.
   c. Quelle est l'image de l'arc de courbe $\widehat{A_nA_{n+1}}$ par cette similitude?
3. On admet que tout arc $\widehat{A_nA_{n+1}}$ a une longueur ℓ_n, et qu'une similitude de rapport k transforme un arc de longueur ℓ en un arc de longueur $k\ell$.
   a. Calculer ℓ_n en fonction de ℓ_0 et de n ; en déduire la longueur L_n de $\widehat{A_0A_n}$.

b. Étudier la limite de L_n lorsque n tend vers $+\infty$. Interpréter géométriquement ce résultat.

4. On donne $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left[f'(t)\right]^2 + \left[g'(t)\right]^2}\,\mathrm{d}x$.

Calculer I_0 ; en déduire la valeur de la limite obtenue en C. 3. b.