

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C juin 1982 Aix-Marseille ∞

EXERCICE 1

5 points

Soit \mathcal{P} un plan affine euclidien orienté et $\mathcal{R} = (\text{O}; \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormé de \mathcal{P} .

À tout nombre complexe z , $z = x + iy$, on associe le point M de coordonnées $(x; y)$ dans le repère \mathcal{R} .

Le nombre complexe conjugué de z est noté \bar{z} . Soit (E) l'ensemble des points de \mathcal{P} dont l'affixe z vérifie la relation :

$$2|z|^2 - \frac{i}{2}(z^2 - (\bar{z})^2) = 1.$$

Soit r la rotation affine de centre O et dont une mesure de l'angle est $\frac{\pi}{4}$ en radians. Soit (E') l'image de (E) par r .

1. Déterminer une équation cartésienne de (E') dans le repère \mathcal{R} . Reconnaître la nature de (E').
2. En déduire le tracé de (E) dans le repère \mathcal{R} ; on prendra 5cm pour unité graphique.

EXERCICE 2

5 points

(La question 3. peut être traitée indépendamment des deux questions précédentes.)

On envisage une particule π pouvant occuper deux positions A et B se déplaçant aléatoirement de la façon suivante :

- La position initiale (au temps 0) de la particule π est A. Au temps n , $n \in \mathbb{N}^*$, la particule π est soit en A soit en B.
- Entre deux instants successifs, n et $(n + 1)$, la particule π saute éventuellement d'une position à l'autre.

Les divers facteurs influant sur cette évolution ne varient pas au cours du temps. L'éventualité d'un saut est par ailleurs indépendante de la position de la particule π au temps n .

On ne demandera pas d'explicitier les espaces probabilisés. Mais nous pouvons traduire en termes mathématiques la situation de la façon suivante :

si $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'évènement « la particule π est en A au temps n » et B_n l'évènement « la particule π est en B au temps n ».

Ainsi $A_n \cap A_{n+1}$ est l'évènement « la particule π est en A au temps n et aussi au temps $(n + 1)$ », ...

Soit respectivement α_n et β_n le probabilité des évènements A_n et B_n .

On donne un nombre θ dans l'intervalle $]0; 1[$. Nous exprimerons les positions définies ci-dessus par les hypothèses :

- $\alpha_0 = 1$ et $\alpha_n + \beta_n = 1$ ($n \in \mathbb{N}$),
- La probabilité de $A_n \cap A_{n+1}$ est $\theta\alpha_n$, celle de $B_n \cap B_{n+1}$ est $\theta\beta_n$.

1. Calculer, en fonction de θ et β_n , la probabilité de l'évènement $B_n \cap A_{n+1}$ (c'est à dire de l'évènement « la particule π se trouve en B au temps n et en A au temps $(n+1)$).
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_{n+1} = (2\theta - 1)\alpha_n + (1 - \theta)$.
3. Du résultat de la question précédente et de $\alpha_0 = 1$, déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\alpha_n = \frac{(2\theta - 1)^n}{2} + \frac{1}{2}.$$
 Quelle est la limite de la suite (α_n) quand n tend vers $+\infty$?

PROBLÈME**5 points**

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note f_k l'application de $]0; 1[$ dans \mathbb{R} définie par :

$$\text{si } k \neq 0 \quad f_k(x) = x^k \sqrt{1-x}, \quad \text{et } f_0(x) = \sqrt{1-x}.$$

I.

1. Étudier la continuité de f_k et la dérivabilité de f_k .
2. Donner, en distinguant selon la valeur de k , le tableau de variation de f_k .
Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, tracer les courbes C_0 , C_1 et C_2 représentatives de f_0 , f_1 et f_2 .
3. Calculer $\int_0^1 f_0(x) dx$.
4. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $I_k = \int_0^1 f_k(x) dx$.
Montrer, en intégrant par parties, que pour tout entier $k > 1$

$$I_k = \frac{2k}{2k+3} I_{k-1}.$$

En déduire une expression de I_k (que l'on ne cherchera pas à simplifier).

5. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 f_k(x) dx \leq \frac{1}{k+1}.$$

II. On considère la fonction numérique F de la variable réelle x définie sur l'intervalle fermé $[0; 1]$ par :

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad \text{si } x \in [0; 1[\quad \text{et } F(1) = 0.$$

1. Étudier la continuité de F sur $[0; 1]$.
Présenter son tableau de variations.
2. Dans la suite du problème, pour tout entier $n > 0$, on note F_n la fonction définie pour tout $x \in [0; 1]$ par :

$$F_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_{n-1}(x).$$

Calculer $F_n(x)$ et montrer que, pour tout x réel fixé dans $[0; 1]$, $F(x)$ est la limite quand n tend vers $+\infty$ de $F_n(x)$.

3. Pour tout entier $n > 2$, on désigne par A_n l'intégrale $\int_0^{1-\frac{1}{n}} F(x) dx$.

Calculer A_n . Déterminer la limite de A_n quand n tend vers $+\infty$.

4. Établir que $\int_0^1 F_n(x) dx$ tend vers 2 quand n tend vers $+\infty$.

On pourra écrire :

$$\int_0^1 F_n(x) dx = \int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx - \int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{x^n}{\sqrt{1-x}} dx + \int_{1-\frac{1}{n}}^1 F_n(x) dx$$

Majorer la deuxième intégrale du second membre en majorant $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ par \sqrt{n} , et majorer la dernière intégrale en majorant $F_n(x)$ par \sqrt{n} .