Baccalauréat C Alger–Tunis juin 1973

EXERCICE 1

On considère les entiers naturels n vérifiant la condition :
n est le produit de trois naturels premiers a, b, c, $(a < b < c)$, dont l'un est la somme des deux autres ; par exemple 286 est un tel nombre : $286 = 2 \times 11 \times 13$.

1. Déterminer a ; encadrer b de sorte que $N_1 \leqslant n \leqslant N_2$, N_1 et N_2 étant deux naturels donnés.
2. En déduire les naturels n pour lesquels $N_1 = 6 \cdot 10^4$ et $N_2 = 8 \cdot 10^4$.

N. B. - L'emploi de tables numériques est autorisé (circulaire du 1er mars 1972) ; aussi les candidats peuvent, mais ce n'est nullement nécessaire, utiliser une table de nombres premiers ; ils affirmeront donc, sans avoir à le justifier, que tel naturel envisagé est premier ou non.

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie par :

$$x \in \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = x - 2 + (x+2)\mathrm{e}^{-x}.$$

et soit C sa courbe représentative (repère orthonormé, unité 1 cm).

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$; noter dans un même tableau le signe de $f''(x)$, puis le sens de variation de $f'(x)$ et son signe, enfin le sens de. variation de f et ses valeurs aux limites.
2. Tracer C, donner sans calcul son asymptote Δ. Soit λ un réel positif ; Δ, C et la droite $x = \lambda$ limitent une région fermée du plan, dont on calculera l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$; trouver la limite de $\mathscr{A}(\lambda)$ pour λ infini.

PROBLÈME

Un espace vectoriel euclidien orienté E est rapporté à la base orthonormée directe $\left(\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}\right)$.
R_1, R_2, R_3 sont des rotations vectorielles, dont les axes respectifs ont pour vecteurs unitaires $\overrightarrow{I}$, $\overrightarrow{J}$, $\overrightarrow{K}$ et dont l'angle commun a une mesure donnée α (radians).
On pose $R = R_3 \circ R_2 \circ R_1$.

1. Soit $\overrightarrow{V}(x\ ;\ y\ ;\ z)$ un vecteur de E ; calculer les coordonnées de :

$$R_1\left(\overrightarrow{V}\right), \quad R_2\left(\overrightarrow{V}\right), \quad R_3\left(\overrightarrow{V}\right), \quad R_1^{-1}\left(\overrightarrow{V}\right)$$

   le calcul des coordonnées de $R\left(\overrightarrow{V}\right)$ est exclu.

   Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{A} = R_1^{-1}\left(\overrightarrow{J}\right)$ et de $\overrightarrow{A'} = R\left(\overrightarrow{A}\right)$.

   En déduire les cas où R est l'identité de E ; ces cas dorénavant écartés, R est une rotation vectorielle déterminée.

2. On pose $u = \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\pi}{4}$; soit $\overrightarrow{\Omega}(\cos u\ ;\ \sin u\ ;\ \cos u)$, vérifier que :

$$R\left(\overrightarrow{\Omega}\right) = \overrightarrow{\Omega}.$$

L'axe de R porte $\overrightarrow{\Omega}$, on l'oriente dans le sens de $\overrightarrow{\Omega}$; l'angle de R ayant alors pour mesure φ, ce qui suit vise à calculer φ en utilisant $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{A'}$.
Reconnaître d'abord $\overrightarrow{\Omega}$ et φ pour $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, puis pour $\alpha = -\dfrac{\pi}{2}$

3. Calculer en fonction de u les coordonnées de $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{A'}$, puis celles des produits vectoriels $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B'} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{A'}$.
Vérifier que $\overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{B'}$ sont unitaires.
$\left(\overrightarrow{\Omega},\ \overrightarrow{A},\ \overrightarrow{B}\right)$ est une base de E, étudier sans calcul sa transformée par R, conclure à l'égalité $\overrightarrow{B'} = R\left(\overrightarrow{B}\right)$.
Établir les formules (voir N. B.) :

$$\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{B'} = \cos^2 u\left(3 - 4\cos^4 u\right), \quad \overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{B'} = \overrightarrow{\Omega}\sin u\left(1 - 4cos^4 u\right).$$

4. Déduire des formules précédentes $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$?
On définit v par $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant v \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, $\quad \cos v = \cos^2 u$, $\sin u \cdot \sin u \geqslant 0$; démontrer la relation $\varphi = 3v + \pi \quad [\text{mod. } 2\pi]$.
On change α en $\alpha + 2\pi$; en quoi $\overrightarrow{\Omega}$ et φ sont-ils changés ? Trouver l'ensemble des valeurs de α qui donnent $\varphi = \dfrac{\pi}{2} \quad [\text{mod. } 2\pi]$, puis sans nouveau calcul $\varphi = -\dfrac{\pi}{2} \quad [\text{mod. } 2\pi]$; on posera

$$\sqrt{3} - 1 = \sin\theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \quad (\theta \approx 0{,}821\,33)$$

N. B. - Il ne sera tenu compte au 3. que des calculs entièrement explicités ; le candidat peut traiter le 4. en admettant ces formules.