∽ Baccalauréat Alger juin 1954 ∾
Série mathématiques

I.

1er sujet

Conservation des angles par l'inversion dans le plan.

I.

2e sujet

Tangentes issues d'un point à une ellipse définie par ses foyers et la longueur du grand axe.

I.

3e sujet

Section d'un cône de révolution par un plan parallèle à un plan tangent au cône.

II.

On donne deux axes de coordonnées rectangulaires $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$, le point O′ de l'axe $x'\text{O}x$, d'abscisse $3a$, la droite D d'équation $y = a$ et le point M, d'abscisse x, variable sur D.
On désigne par (O) le cercle de centre O et de rayon $a\sqrt{2}$ et par (O′) le cercle de centre O′ et de rayon a.

1. Calculer, en fonction de a et x, les puissances P et P′ du point M par rapport aux cercles (O) et (O′).
   Étudier les variations de $z = \dfrac{\text{P}}{\text{P}'}$ quand M décrit D.
   Tracer la courbe représentative.
   Pour quelles positions de M le rapport z a-t-il une valeur donnée k ? Discuter.
2. On se place dans l'hypothèse où il existe deux points M' et M'' de D pour lesquels $z = k$.
   Évaluer le rapport dans lequel le segment OO′ est partagé par le point C de Ox qui a même abscisse que le milieu de $M'M''$.
   Montrer que, pour tout point du cercle (C), de centre C, qui passe par M' et M'', le rapport des puissances aux cercles (O) et (O′) est égal à k.
   Comparer les axes radicaux des trois cercles (O), (O′), (C) pris deux à deux.
   Que peut-on dire des cercles (C) lorsque k prend toutes les valeurs compatibles avec l'hypothèse faite au début de cette question ?
   Y a-t-il d'autres cercles lieux de points dont le rapport des puissances par rapport à (O) et (O′) garde une valeur constante ?
   Tout point de l'axe Ox peut-il être le centre d'un tel cercle ?
3. Construire les points de Poncelet, I et J, du faisceau de cercles défini par (O) et (O′).
   Soit N le point de rencontre des polaires de M par rapport à (O) et (O′). Que peut-on dire du cercle de diamètre MN quand M décrit D ?
   Comment peut-on utiliser les points I et J pour la construction graphique de N ?

On projette I et J en I′ et J′ sur D, M et N en M' et N' sur Ox. Montrer que IM et J′N' sont parallèles, ainsi que JM et I′N'.

Évaluer, en fonction de NN', la puissance de N par rapport au cercle circonscrit à IJJ′I′.

Trouver le lieu de N et le lieu de l'orthocentre du triangle MIJ quand M décrit D.