∽ Baccalauréat Alger juin 1956 ∾
série mathématiques

I. 1er sujet

Démontrer que la courbe représentative de la fonction

$$y = \frac{x^2}{x-1}$$

admet pour asymptote la droite d'équation $y = x+1$.
Quelle est la distance des deux points de même abscisse, x, pris l'un sur la courbe, l'autre sur son asymptote ?
Pour quelles valeurs de x cette distance est-elle moindre que $\frac{1}{10}$?

I. 2e sujet

Expliquer sur l'exemple

$$\left\{\begin{array}{lcl} mx+(m+1)y & = & 4m \\ (m-1)x-3my & = & 2m-3 \end{array}\right.$$

la résolution et la discussion d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues, x, y.

I. 3e sujet

Démontrer que le rapport $\frac{\sin x}{x}$ tend vers 1 lorsque l'arc x mesuré en radians, tend vers 0.
En déduire le calcul de la dérivée de la fonction

$$y = \cos x.$$

II.

Étant donnés deux points fixes F et I, dont la distance est FI $= d$, on considère les ellipses (E), d'excentricité e, qui ont pour foyer F et pour directrice associée une droite variable D passant par I.

1. D étant donnée, construire les quatre sommets, A, A$'$, B, B$'$, de l'ellipse (E). En désignant par u l'angle de D avec IF, calculer la longueur du grand axe AA$'$ de l'ellipse (E).
   Déterminer D de manière que AA$'$ ait une longueur donnée. Discuter.
2. H étant la projection de F sur D, montrer que les rapports $\dfrac{\overline{\text{FA}}}{\overline{\text{FH}}}$ et $\dfrac{\overline{\text{FA}'}}{\overline{\text{FH}}}$ restent constants quand D varie en passant par I.
   Lieux géométriques des sommets A, A$'$, du centre O, du deuxième foyer, F$'$, de l'ellipse (E).
   Que peut-on dire de la façon dont se déplacent le petit axe et la deuxième directrice, D$'$?
3. Indiquer comment varie le triangle FOB.
   Lieux géométriques des sommets B, B$'$.
   Un point B étant choisi sur son lieu, déterminer le centre, les autres sommets, le deuxième foyer et les directrices de l'ellipse (E) dont le petit axe a une extrémité en B.
4. On mène de I les tangentes à une ellipse (E), leurs points de contact étant M, M$'$.
   Que peut-on dire des angles MFI et M$'$FI ?
   Que peut-on en conclure pour la ligne (L) sur laquelle se déplacent M et M$'$?
   M étant un point pris sur (L), peut-on construire la directrice D de l'ellipse (E) qui est tangente en M à IM ?
   Lieu géométrique de M et M$'$.

Préciser la nature de la figure formée par les points M, M$'$, F et le point J où D rencontre (L).

D étant donnée, montrer que J est le centre d'homothétie des cercles de centres M et M$'$ qui passent par F.

Construire les points M, M$'$ pour une position de D donnée.

N. B. Les constructions demandées seront faites en prenant FI = 3 cm et $e = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.