

Durée : 4 heures

☞ Baccalauréat C juin 1985 Algérie ☞

EXERCICE 1

5 points

On désigne par \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes et on note P le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$, \vec{u} ayant pour affixe 1 et \vec{v} ayant pour affixe i (unité graphique : 2 cm).

L'objet de l'exercice est d'étudier l'application f de $\mathbb{C} - \{1\}$ dans \mathbb{C} définie par :

$$f : z \mapsto Z = 1 - \frac{2i}{z-1}.$$

1. Soit a un nombre réel strictement positif.

Déterminer l'ensemble C_a des points M d'affixe Z tel que $|Z - 1| = a$ et l'ensemble C'_a des points m d'affixe z tels que $f(z)$ appartienne à C_a (on pourra exprimer $|Z - 1|$ en fonction de $|z - 1|$).

2. On pose $z = x + iy$ et $Z = X + iY$.

Exprimer $X - 1$ et Y en fonction de x et y .

a. Déterminer l'ensemble D' des points m tels que $f(z)$ appartienne à l'ensemble D des nombres réels.

b. Soit Δ l'ensemble des points M tels que $Z - 1$ soit imaginaire pur.

Déterminer l'ensemble Δ' des points m tels que $f(z)$ appartienne à Δ .

3. Dessiner C_2 , D et Δ sur une même figure.

Dessiner C'_2 , D' et Δ' sur une autre figure.

EXERCICE 2

6 points

L'objet de l'exercice est d'étudier la suite de terme général :

$$u_n = \int_0^1 f_n(x) dx, \quad \text{où } f_n(x) = \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}.$$

(on convient que $x^0 = 1$).

1. Calculer la limite de $f_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$, x étant un point donné de $[0; 1]$.

2. Calculer u_0 et u_1 en effectuant le changement de variable $t = 1 + x$.

3. Comparer x^n à x^{n+1} lorsque $x \in [0; 1]$.

En déduire que la suite (u_n) est décroissante (on ne cherchera pas à calculer u_n).

4. Déterminer le maximum et le minimum de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$, sur $[0; 1]$.

En déduire un encadrement de u_n . Déterminer la limite de la suite (u_n) .

5. En observant que $u_{n-1} + u_n = \int_0^1 x^{n-1} \sqrt{1+x} dx$ établir que $u_{n-1} + u_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n}$.

6. À l'aide des résultats précédents, établir que :

$$\frac{\sqrt{2}}{2(n+1)} \leq u_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2n}.$$

En déduire la limite de nu_n lorsque n tend vers $+\infty$.

PROBLÈME

9 points

Soit l'équation différentielle :

$$y'' + y' + \frac{17}{4}y = 0 \quad (1).$$

1. Déterminer l'unique solution f de cette équation sur $[0; +\infty[$ telle que :

$$f(0) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f'(0) = \sqrt{3} - \frac{1}{4}.$$

2. Écrire $f(x)$ sous la forme :

$$f(x) = e^{-x/2} \cos(2x - \varphi),$$

où φ est un élément de $[0; \pi/2]$ que l'on précisera.

3. Préciser l'ensemble des points x de $[0; +\infty[$ tels que $f(x) = 0$; on rangera ces points en une suite strictement croissante $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$.

4. Établir que pour tout point x de $[0; +\infty[$, $|f(x)| \leq e^{-x/2}$.

Préciser l'ensemble de points x tels que $f(x) = e^{-x/2}$, puis tels que $f(x) = -e^{-x/2}$. On rangera ces points en des suites strictement croissantes $(b_0, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$ et $(c_0, c_1, c_2, \dots, c_n, \dots)$.

5. Dans un plan P rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ tracer les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto e^{-x/2}$ et $x \mapsto -e^{-x/2}$, où $x > 0$, et donner l'allure de la courbe représentative de f (on ne demande pas d'étudier le sens de variation de f et on choisira les unités graphiques sur Ox et Oy de manière à faciliter la lecture du graphique).

6. En utilisant l'équation (1), calculer $g(a) = \int_0^a f(x) dx$, où $a > 0$.

Déterminer la limite de $g(a)$ lorsque a tend vers $+\infty$.