

☞ Baccalauréat C Algérie juin 1990 ☞

EXERCICE 1

3,5 POINTS

Le plan orienté est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$; on choisit 1 cm pour unité.

On considère le cercle (C_1) de centre O et de rayon 8 et le cercle (C_2) de centre O et de rayon 2.

Ψ étant un nombre réel, on considère le point I de (C_1) tel que :

$$(\vec{i}, \overrightarrow{OI}) = \Psi \text{ modulo } 2\pi$$

et le point J de (C_2) tel que :

$$(\vec{i}, \overrightarrow{OJ}) = -\Psi \text{ modulo } 2\pi$$

On appelle M le milieu du segment $[IJ]$.

1. Représenter les cercles (C_1) et (C_2) ; placer I , J et M en choisissant $\Psi = \frac{\pi}{3}$.
2. Dans cette question Ψ est un réel quelconque.
 - a. Calculer, en fonction de Ψ , les coordonnées des points I , J et M .
 - b. Soit (E) l'ensemble des points M quand Ψ décrit \mathbb{R} ; démontrer que la tangente en M à (E) est la médiatrice du segment $[IJ]$.
 - c. Préciser la nature de (E) et écrire une équation cartésienne de (E) .
 - d. Tracer (E) sur la figure de la 1^{re} question.

EXERCICE 2

4,5 POINTS

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soit A le point d'affixe $-2 + 3i$ et B le point d'affixe $1 - 3i$.

Soit M le point d'affixe z , $z \neq -2 + 3i$; à z on associe le nombre complexe z' tel que :

$$z' = \frac{z - 1 + 3i}{z + 2 - 3i}.$$

1.
 - a. Établir une relation entre un argument de z' et l'angle orienté $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$.
 - b. Déterminer et construire l'ensemble (E_1) des points M du plan tels que z' ait pour argument $\frac{\pi}{2}$.
2. Déterminer et construire l'ensemble (E_2) des points M du plan tels que $|z'| = 2$.
3. Déterminer l'affixe du point commun K à (E_1) et (E_2) .

PROBLÈME**12 POINTS**

Toutes les représentations graphiques demandées seront effectuées sur la même figure, dans un plan (P) rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 4 cm).

A. On considère la fonction numérique f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x \ln \frac{x+2}{x} & \text{si } x \text{ appartient à }]0; +\infty[\\ f(0) = 0. \end{cases}$$

1.
 - a. Montrer que f a pour limite 0 en 0.
 - b. f est-elle dérivable en 0?
 - c. En posant

$$h = \frac{2}{x} \quad (x > 0),$$

trouver la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

2.
 - a. Pour x appartenant à $]0; +\infty[$, calculer $f'(x)$ et vérifier que

$$f''(x) = -\frac{4}{x(x+2)^2}.$$

- b. Étudier le sens de variation de f' , et trouver la limite de $f'(x)$ quand x tend vers $+\infty$. En déduire le signe de f' .
 - c. Dresser le tableau des variations de f
3. On appelle (C) la représentation graphique de f dans le plan (P) rapporté au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Tracer (C) en indiquant la tangente au point O et le point A d'abscisse 2.
4. Soit u la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par

$$u(x) = \frac{2x}{x+2}$$

et (H) sa représentation graphique dans le plan (P) rapporté au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- a. Dresser le tableau de variations de u .
- b. Vérifier que pour x appartenant à $]0; +\infty[$ on a :

$$f(x) - u(x) = x f'(x).$$

En déduire la position relative de (C) et de (H). Tracer (H) en indiquant le point B d'abscisse 2.

- c. λ étant un réel strictement positif, montrer que la tangente à (C) au point d'abscisse λ . rencontre l'axe des ordonnées au point J d'ordonnée $u(\lambda)$.
En déduire à l'aide du tracé de (H) la détermination de la tangente à (C) au point d'abscisse λ . Tracer de cette façon la tangente à (C) en A.

B. On se propose de déterminer l'ensemble (E) des fonctions g , définies et dérivables sur $]0; +\infty[$, et possédant la propriété P suivante :

Pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$,

$$g(x) - xg'(x) = \frac{2x}{x+2}$$

g étant une fonction définie et dérivable sur $]0; +\infty[$, on pose, pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$,

$$G(x) = \frac{g(x)}{x}$$

1. Montrer que g possède la propriété P si et seulement si : pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$,

$$G'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}.$$

2. En déduire l'ensemble (E).

C. k étant un réel, on considère la fonction numérique f_k définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f_k(x) = f(x) + kx & \text{si } x \text{ appartient à }]0; +\infty[\\ f_k(0) = 0. \end{cases}$$

On appelle (\mathcal{C}_k) la représentation graphique de f_k dans le plan (P) rapporté au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. On suppose k strictement positif. Donner le tableau des variations de f_k .

2. On suppose dans cette question que k est strictement négatif.

- a.** En utilisant les variations de f' obtenues dans A. 2. b., montrer que l'équation $f'_k(x) = 0$ admet dans $]0; +\infty[$ une solution unique notée ν_k .
- b.** Dresser le tableau des variations de f_k .
- c.** On note I_k le point de (\mathcal{C}_k) d'abscisse ν_k . Montrer que I_k appartient à (H) (on pourra utiliser la propriété P).