

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Algérie septembre 1993 ∞

EXERCICE 1

4 points

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = 9, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3 \quad \text{et} \quad v_n = u_n + 6.$$

1.
 - a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique à termes positifs.
 - b. Calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^n v_k$ en fonction de n et en déduire la somme $S'_n = \sum_{k=0}^n u_k$, en fonction de n .
 - c. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n$.
2. On définit la suite (w_n) par $w_n = \ln v_n$ pour tout entier n .
 - a. Montrer que (w_n) est une suite arithmétique.
 - b. Calculer $S''_n = \sum_{k=0}^n w_k$ en fonction de n et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S''_n$.
3.
 - a. Calculer le produit $P_n = v_0 \cdot v_1 \cdot \dots \cdot v_n$ en fonction de n .
 - b. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$.