Durée : 4 heures

Baccalauréat Algérien[1] juin 1969

EXERCICE 1

Mettre l'expression $\sin x - \sqrt{3}\cos x$ sous la forme $A\cos(x-\varphi)$.
En déduire les nombres x solutions de l'équation

$$\sqrt{\sin x - \sqrt{3}\cos x + 2} = \sqrt{3}.$$

EXERCICE 2

Soit a et b des nombres rationnels non nuls; on appelle (E) l'ensemble des nombres x de la forme $a + b\sqrt{3}$.

1. Soit deux nombres, x et x', de l'ensemble (E), définis par

$$x = a + b\sqrt{3} \quad \text{et} \quad x' = a' + b'\sqrt{3}.$$

Démontrer que x et x' sont égaux si, et seulement si,

$$a = a' \quad \text{et} \quad b = b'.$$

2. On définit, dans l'ensemble (E), la loi, notée T, par la relation

$$(a + b\sqrt{3})\,T\left(a' + b'\sqrt{3}\right) = aa' + bb'\sqrt{3}.$$

La loi T est-elle associative ?
Existe-t-il dans l'ensemble (E) un élément neutre pour cette loi ?
Chaque élément de l'ensemble (E) admet-il un symétrique pour cette loi ?
L'ensemble (E) présente-t-il une structure de groupe pour la loi T ?

PROBLÈME

1. Dans un repère orthonormé on désigne par $x'\mathrm{O}x$ et $y'\mathrm{O}y$ les axes de coordonnées. Tracer dans ce repère l'hyperbole (H) d'équation

$$y^2 - 3x^2 + \frac{4}{3}a^2 = 0 \quad (a > 0).$$

Préciser les foyers, les sommets et les asymptotes de cette hyperbole.

2. Soit M un point de la droite $y'y$, d'ordonnée m.
À tout nombre r réel positif on associe le cercle (C), de centre M et de rayon r.

1. Le programme de ce baccalauréat et la nature des épreuves ne sont pas les mêmes que ceux du baccalauréat français.

a. m étant donné, discuter, suivant les valeurs de r, le nombre de points d'intersection des courbes (C) et (H).

Calculer, en fonction de m, la valeur de r pour laquelle les courbes (C) et (H) sont tangentes en deux points.

Dans toute la suite du problème on ne considérera que ce cas et l'on désignera alors par P_1 et P_2 les deux points de contact de ces courbes et par (γ) le cercle (C) correspondant.

b. Écrire l'équation de la droite $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$.

3. **a.** Montrer que le rayon du cercle (γ) est égal à la moitié de la distance de son centre, M, à un foyer, F, de l'hyperbole (H).

b. On désigne par I le point de la droite MF conjugué du point F par rapport au cercle (γ).

Montrer que les points 1 et M sont homologues dans une homothétie de centre F, dont on précisera le rapport.

En déduire que le point I appartient à la droite $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$. Quel est l'ensemble des points I lorsque M décrit la droite $y'y$?

4. Soit $\left(\gamma'\right)$ l'inverse du cercle (γ) dans l'inversion de pôle F et de puissance $2a^2$; soit M' le centre du cercle $\left(\gamma'\right)$.

a. Quel est l'ensemble des points M' lorsque le point M décrit la droite $y'y$?

b. Montrer que les cercles $\left(\gamma'\right)$ sont orthogonaux à un cercle fixe, que l'on précisera.

Construire les inverses, P'_1 et P'_2, des points P_1 et P_2 ?

c. Montrer que la droite $\mathrm{P}'_1\mathrm{P}'_2$ passe par un point fixe, A.

En déduire que l'ensemble (H'), inverse de l'hyperbole (H) dans l'inversion $\left(\mathrm{F},\ 2a^2\right)$, est invariant dans une inversion, que l'on précisera.