

## ☞ Baccalauréat S Amérique du Nord 29 mai 2008 ☞

### EXERCICE 1

5 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  unité graphique : 4 cm.

On considère le point A d'affixe  $z_A = 2 + i$  et le cercle  $(\Gamma)$  de centre A et de rayon  $\sqrt{2}$ .

- Faire une figure qui sera complétée tout au long de l'exercice.
- Déterminer les affixes des points d'intersection de  $(\Gamma)$  et de l'axe  $(O; \vec{u})$ .
  - On désigne par B et C les points d'affixes respectives  $z_B = 1$  et  $z_C = 3$ .  
Déterminer l'affixe  $z_D$  du point D diamétralement opposé au point B sur le cercle  $(\Gamma)$ .
- Soit M le point d'affixe  $\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i$ .
  - Calculer le nombre complexe  $\frac{z_D - z_M}{z_B - z_M}$ .
  - Interpréter géométriquement un argument du nombre  $\frac{z_D - z_M}{z_B - z_M}$ ; en déduire que le point M appartient au cercle  $(\Gamma)$ .
- On note  $(\Gamma')$  le cercle de diamètre [AB].  
La droite (BM) recoupe le cercle  $(\Gamma')$  en un point N.
  - Montrer que les droites (DM) et (AN) sont parallèles.
  - Déterminer l'affixe du point N.
- On désigne par  $M'$  l'image du point M par la rotation de centre B et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ .
  - Déterminer l'affixe du point  $M'$ .
  - Montrer que le point  $M'$  appartient au cercle  $(\Gamma')$ .

### EXERCICE 2

5 points

#### Enseignement obligatoire

#### Partie A

On considère deux points A et D de l'espace et on désigne par I le milieu du segment [AD].

- Démontrer que, pour tout point M de l'espace,  $\vec{MD} \cdot \vec{MA} = MI^2 - IA^2$ .
- En déduire l'ensemble (E) des points M de l'espace, tels que  $\vec{MD} \cdot \vec{MA} = 0$ .

#### Partie B :

Dans l'espace rapporté au repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives :

$$A(3 ; 0 ; 0), B(0 ; 6 ; 0), C(0 ; 0 ; 4) \text{ et } D(-5 ; 0 ; 1).$$

1.
  - a. Vérifier que le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  est normal au plan (ABC).
  - b. Déterminer une équation du plan (ABC).
2.
  - a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $\Delta$ , orthogonale au plan (ABC) passant par D.
  - b. En déduire les coordonnées du point H, projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).
  - c. Calculer la distance du point D au plan (ABC).
  - d. Démontrer que le point H appartient l'ensemble (E) défini dans la partie A.

**EXERCICE 2****5 points****Enseignement de spécialité**

L'espace est rapporté au repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On nomme (S) la surface d'équation  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ .

1. Montrer que la surface (S) est symétrique par rapport au plan  $(xOy)$ .
2. On nomme A et B les points de coordonnées respectives  $(3 ; 1 ; -3)$  et  $(-1 ; 1 ; 1)$ .
  - a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par les points A et B.
  - b. Démontrer que la droite (D) est incluse dans la surface (S).
3. Déterminer la nature de la section de la surface (S) par un plan parallèle au plan  $(xOy)$ .
4.
  - a. On considère la courbe (C), intersection de la surface (S) et du plan d'équation  $z = 68$ . Préciser les éléments caractéristiques de cette courbe.
  - b.  $M$  étant un point de (C), on désigne par  $a$  son abscisse et par  $b$  son ordonnée.

On se propose de montrer qu'il existe un seul point  $M$  de (C) tel que  $a$  et  $b$  soient de entiers naturels vérifiant  $a < b$  et  $\text{ppcm}(a ; b) = 440$ , c'est-à-dire tel que  $(a ; b)$  soit solution du système

$$(1) : \begin{cases} a < b \\ a^2 + b^2 = 4625 \\ \text{ppcm}(a ; b) = 440 \end{cases}$$

Montrer que si  $(a ; b)$  est solution de (1) alors  $\text{pgcd}(a ; b)$  est égal à 1 ou 5.

Conclure

*Dans cette question toute trace de recherche même incomplète ou d'initiative, même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.*

**EXERCICE 3****6 points****Commun à tous les candidats**

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]1 ; +\infty[$  par

$$f(x) = \ln x - \frac{1}{\ln x}.$$

On nomme  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $f$  et  $\Gamma$  la courbe d'équation  $y = \ln x$  dans un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Étudier les variations de la fonction  $f$  et préciser les limites en 1 et en  $+\infty$ .
2.
  - a. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x]$ .  
Interpréter graphiquement cette limite.
  - b. Préciser les positions relatives de  $(\mathcal{C})$  et de  $\Gamma$ .
3. On se propose de chercher les tangentes à la courbe  $(\mathcal{C})$  passant par le point O.
  - a. Soit  $a$  un réel appartenant à l'intervalle  $]1; +\infty[$ .  
Démontrer que la tangente  $\mathcal{T}_a$  à  $(\mathcal{C})$  au point d'abscisse  $a$  passe par l'origine du repère si et seulement si  $f(a) - af'(a) = 0$ .  
Soit  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $]1; +\infty[$  par
 
$$g(x) = f(x) - xf'(x).$$
  - b. Montrer que sur  $]1; +\infty[$ , les équations  $g(x) = 0$  et  $(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$  ont les mêmes solutions.
  - c. Après avoir étudié les variations de la fonction  $u$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $u(t) = t^3 - t^2 - t - 1$  montrer que la fonction  $u$  s'annule une fois et une seule sur  $\mathbb{R}$ .
  - d. En déduire l'existence d'une tangente unique à la courbe  $(\mathcal{C})$  passant par le point O.  
La courbe  $(\mathcal{C})$  et la courbe  $\Gamma$  sont données en annexe.  
Tracer cette tangente le plus précisément possible sur cette figure.
4. On considère un réel  $m$  et l'équation  $f(x) = mx$  d'inconnue  $x$ .  
Par lecture graphique et sans justification, donner, suivant les valeurs du réel  $m$ , le nombre de solutions de cette équation appartenant à l'intervalle  $]1; 10]$ .

**EXERCICE 4****4 points****Commun à tous les candidats**

On considère les suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$  définies pour tout entier naturel  $n$  non nul par :

$$x_n = \int_0^1 t^n \cos t \, dt \quad \text{et} \quad y_n = \int_0^1 t^n \sin t \, dt.$$

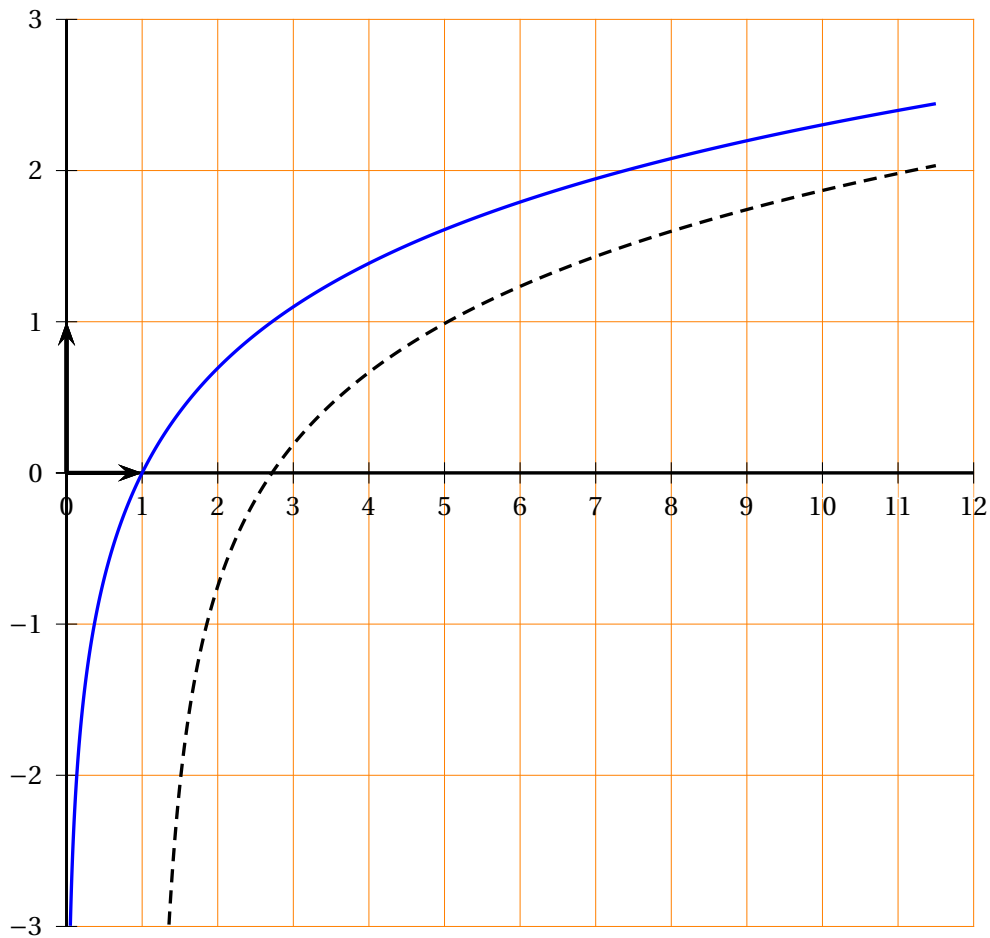
1.
  - a. Montrer que la suite  $(x_n)$  est à termes positifs.
  - b. Étudier les variations de la suite  $(x_n)$ .
  - c. Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite  $(x_n)$ ?
2.
  - a. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $x_n \leq \frac{1}{n+1}$ .
  - b. En déduire la limite de la suite  $(x_n)$ .
3.
  - a. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1)$ .
  - b. En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$ .
4. On admet que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos(1)$ .  
Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} ny_n$ .

## Annexe

Cette page est à compléter et à remettre avec la copie à la fin de l'épreuve

### Exercice 3

#### Représentations graphiques obtenues à l'aide d'un tableur



— Courbe  $\Gamma$  représentative de la fonction  $\ln$

- - - Courbe  $\mathcal{C}$  représentative de la fonction  $f$