

∞ Baccalauréat C Amérique du Sud novembre 1988 ∞

**EXERCICE 1**

**4 POINTS**

Dans le plan  $\mathcal{P}$  on considère le triangle équilatéral ABC.  
On pose  $AB = BC = CA = a$ ,  $a > 0$ .

1. Construire le point G barycentre du système (A, 2), (B, 1), (C, 1).
2. Déterminer et construire chacun des deux ensembles suivants :

a.  $E_1 = \{M \in \mathcal{P} / 2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2\}$ .

b.  $E_2 = \left\{M \in \mathcal{P} / 2\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \frac{3a^2}{2}\right\}$ .

Pour ce dernier ensemble, on pourra utiliser le point G puis le milieu I du segment [AG].

**EXERCICE 2**

**6 POINTS**

Dans le plan P muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  un point M quelconque de coordonnées  $(x; y)$  a pour affixe  $m$ ,  $m \in \mathbb{C}$ ; on note  $|m|$  le module de  $m$  et  $\overline{m}$  le conjugué de  $m$ .

1. On considère la courbe E dont une équation cartésienne dans P est :

$$x^2 + 5y^2 = 1.$$

Déterminer la nature géométrique de E et ses éléments caractéristiques (centre, axes, sommets).

Tracer E dans le plan P (unité : 6 cm).

2. Soit  $\Omega$  l'application de P dans P qui, à tout point M d'affixe  $m$ , associe  $M'$  d'affixe  $\omega(m)$  définie par :

$$\omega(m) = |m| + (m - \overline{m}).$$

On note  $E'$  l'image de E par  $\Omega$ .

- a. Calculer les coordonnées  $x'$  et  $y'$  de  $M'$  en fonction de  $x$  et  $y$ , coordonnées de M.  
Calculer  $|\omega(m)|^2$  en fonction de  $x$  et  $y$ , en déduire que E est l'ensemble des points M de P tels que  $|\omega(m)| = 1$  et que  $E'$  est contenue dans le cercle C de centre O et de rayon 1.

- b. Soit le point  $M'$  de coordonnées  $(x'; y')$ .

Montrer que  $M'$  admet un ou deux antécédents par  $\Omega$  si et seulement si les coordonnées de  $M'$  vérifient les deux relations :  $x' \geq 0$  et  $|y'| \leq 2x'$ , caractériser géométriquement l'ensemble  $S'$  de ces points  $M'$ ; en déduire que  $E'$  est un arc du cercle C que l'on précisera.

**PROBLÈME****10 POINTS**

Les objectifs de ce problème sont l'étude des variations d'une fonction  $g$  et la construction de sa courbe représentative  $\Gamma$ .

**Partie A**

1. Soit la fonction

$$f_1: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x + 1 + \ln x.$$

On note  $\Lambda$  la courbe représentative de la fonction définie dans  $\mathbb{R}_+^*$  par :  
 $x \mapsto \ln x$  dans le plan rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- a. Étudier les variations (sens de variations et limites aux bornes) de  $f_1$  et déterminer le signe de  $f_1(x)$  suivant les valeurs de  $x$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  (on montrera en particulier que  $f_1$  s'annule en changeant de signe en un unique point  $x_0$  de  $\mathbb{R}_+^*$ );
- b. Soit  $\Delta$  la droite d'équation cartésienne  $x + y + 1 = 0$ ; tracer  $\Delta$  et  $\Lambda$  (unité de longueur : 2 cm); vérifier que  $x_0$  (voir a.) est l'abscisse de l'unique point d'intersection de  $\Delta$  et  $\Lambda$ .

2. Soit la fonction

$$f_2: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x \ln x - x^2 + 1.$$

Étudier le sens de variations de  $f_2'$  et de  $f_2$ . (On ne demande pas l'étude du comportement de ces fonctions lorsque  $x$  tend vers 0 et lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .)

Calculer  $f_2(1)$  et en déduire le signe de  $f_2(x)$  suivant les valeurs de  $x$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ .

**Partie B**

Soit  $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$\begin{cases} g(0) = 0 \text{ et} \\ g(x) = \frac{x \ln x}{x+1} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*. \end{cases}$$

On note  $\Gamma$  la courbe représentative de  $g$  dans le plan et  $D$  la tangente à  $\Gamma$  au point d'abscisse 1.

1. a. Montrer que  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ ; déterminer, si elle existe, la demi-tangente à  $\Gamma$  au point d'abscisse 0.  
 b. Étudier les variations de  $g$ , en utilisant A 1. a.; vérifier que  $g(x_0) = -x_0$ .
2. Étudier les positions relatives de  $\Lambda$  et  $\Gamma$ . Soient  $M$  et  $M'$  les deux points de  $\Lambda$  et  $\Gamma$  de même abscisse  $x$ ; quelle est la limite de  $M'M$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ ? Interpréter géométriquement ce résultat.
3. En utilisant A 2., étudier la position relative de  $\Gamma$  par rapport à  $D$ .
4. Tracer  $D$  et  $\Gamma$  sur le graphique de A 1.