Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Amérique du Nord 3 juin 2010 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives :

$$\text{A}(1\,;\,-2\,;\,4) \quad \text{B}(-2\,;\,-6\,;\,5) \quad \text{C}(-4\,;\,0\,;\,-3).$$

1. (a) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   (b) Démontrer que le vecteur $\vec{n}\,(1\,;\,-1\,;\,-1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   (c) Déterminer une équation du plan (ABC).
2. (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par le point O et orthogonale au plan (ABC).
   (b) Déterminer les coordonnées du point O′ projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).
3. On désigne par H le projeté orthogonal du point O sur La droite (BC).
   Soit t le réel tel que $\overrightarrow{\text{BH}} = t\overrightarrow{\text{BC}}$.
   (a) Démontrer que $t = \dfrac{\overrightarrow{\text{BO}} \cdot \overrightarrow{\text{BC}}}{\left\|\overrightarrow{\text{BC}}\right\|^2}$.
   (b) En déduire le réel t et les coordonnées du point H.

EXERCICE 2 **3 points**

Commun à tous les candidats

Une urne contient des boules indiscernables au toucher.
20 % des boules portent le numéro 1 et sont rouges.
Les autres portent le numéro 2 et parmi elles, 10 % sont rouges et les autres sont vertes.

1. On tire une boule au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ?
2. On a tiré une boule au hasard. Elle est rouge.
   Montrer que la probabilité qu'elle porte le numéro 2 est égale à $\dfrac{2}{7}$.
3. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise (après chaque tirage la boule est remise dans l'urne).
   (a) Exprimer en fonction de n la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages.
   (b) Déterminer l'entier n à partir duquel la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages est supérieure ou égale à 0,99.

Exercice 3 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
On réalisera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.
On considère les points A d'affixe i, B d'affixe $-2\mathrm{i}$ et D d'affixe 1.
On appelle E le point tel que le triangle ADE soit équilatéral direct.
Soit f l'application qui à tout point M d'affixe z ($z \neq \mathrm{i}$) associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{2z - \mathrm{i}}{\mathrm{i}z + 1}.$$

1. Démontrer que le point E a pour affixe $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 + \mathrm{i})$.
2. Exprimer sous forme algébrique l'affixe du point D$'$ associé au point D par l'application f.
3. (a) Démontrer que, pour tout nombre complexe z différent de i, $\left(z' + 2\mathrm{i}\right)(z - \mathrm{i}) = 1$.
   (b) En déduire que pour tout point M d'affixe $z (z \neq \mathrm{i})$:

   $$\mathrm{B}M' \times \mathrm{A}M = 1$$
   et $\left(\vec{u},\ \overrightarrow{\mathrm{B}M'}\right) = -\left(\vec{u},\ \overrightarrow{\mathrm{A}M}\right) + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif.
4. (a) Démontrer que les points D et E appartiennent au cercle (C) de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.
   (b) En utilisant les résultats de la question 3. b., placer le point E$'$ associé au point E par l'application f. On laissera apparents les traits de construction.
5. Quelle est la nature du triangle BD$'$ E$'$?

Exercice 3 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On cherche l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x,\ y)$ solutions de l'équation

$$(\mathrm{E}) : \quad 16x - 3y = 4.$$

1. Vérifier que le couple (1, 4) est une solution particulière de (E).
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
On considère la transformation f du plan, qui à tout point M d' affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{3\mathrm{i}\pi}{8}}z.$$

On définit une suite de points (M_n) de la manière suivante :
le point M_0 a pour affixe $z_0 = \mathrm{i}$ et pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = f(M_n)$.
On note z_n l'affixe du point M_n
Les points M_0, M_1, M_2 et M_3 sont placés sur la figure donnée en annexe page 6.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f.
2. On note g la transformation $f \circ f \circ f \circ f$.
   (a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation g.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel n, $\mathrm{O}M_{n+4} = 4\mathrm{O}M_n$ et que $\left(\overrightarrow{\mathrm{O}M_n},\ \overrightarrow{\mathrm{O}M_{n+4}}\right) = -\dfrac{\pi}{2} + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif.
   (c) Compléter la figure en construisant les points M_4, M_5 et M_6.
3. Démontrer que pour tout entier naturel n, $z_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3n\pi}{8}\right)}$.
4. Soient deux entiers naturels n et p tels que $p \leqslant n$.
   (a) Exprimer en fonction de n et p une mesure de $\left(\overrightarrow{\mathrm{O}M_p},\ \overrightarrow{\mathrm{O}M_n}\right)$.
   (b) Démontrer que les points O, M_p et M_n sont alignés si et seulement si $n - p$ est un multiple de 8.
5. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que le point M_n appartienne à la demi-droite $[\mathrm{O}x)$. On pourra utiliser la partie A.

EXERCICE 4 — 8 points

Commun à tous les candidats

À tout entier naturel n non nul, on associe la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{4\mathrm{e}^{nx}}{\mathrm{e}^{nx} + 7}.$$

On désigne par $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
Les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ sont données en annexe.

Partie A : Étude de la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = \dfrac{4\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 7}$

1. Vérifier que pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{4}{1 + 7\mathrm{e}^{-x}}$.
2. (a) Démontrer que la courbe $\mathscr{C}_1$ admet deux asymptotes dont on précisera des équations.
   (b) Démontrer que la fonction f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   (c) Démontrer que pour tout réel x, $0 < f_1(x) < 4$.
3. (a) Démontrer que le point I_1 de coordonnées $(\ln 7\ ;\ 2)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_1$.
   (b) Déterminer une équation de la tangente (T_1) à la courbe $\mathscr{C}_1$ au point I_1.

   (c) Tracer la droite (T_1).

4. (a) Déterminer une primitive de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.

   (b) Calculer la valeur moyenne de f_1 sur l'intervalle $[0\,;\,\ln 7]$.

Partie B : Étude de certaines propriétés de la fonction f_n.

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul le point $\text{A}\left(0\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_n$.
2. (a) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul la courbe $\mathscr{C}_n$ et la droite d'équation $y = 2$ ont un unique point d'intersection dont on précisera l' abscisse.
   On note I_n ce point d'intersection.

   (b) Déterminer une équation de la tangente (T_n) à la courbe $\mathscr{C}_n$ au point I_n.

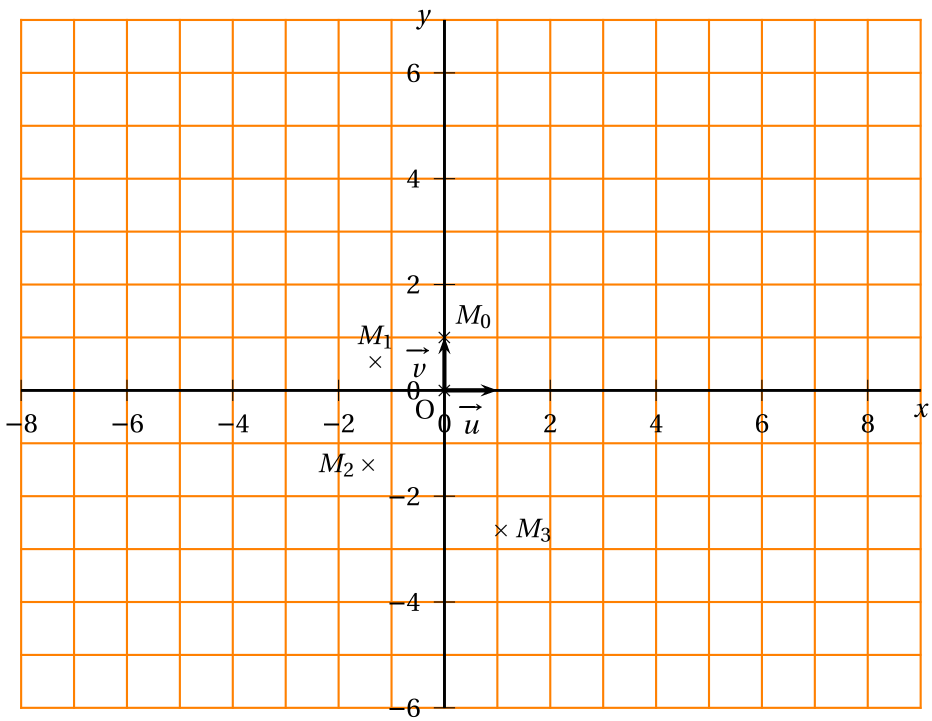
   (c) Tracer les droites (T_2) et (T_3).
3. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par

$$u_n = \frac{n}{\ln 7}\int_0^{\frac{\ln 7}{n}} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

   Montrer que la suite (u_n) est constante.

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve

Exercice 3 (enseignement de spécialité)



Exercice 4