

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Montréal et New York juin 1972 ∞

EXERCICE 1

Soit (E) un espace vectoriel réel de dimension trois dont $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base. On considère l'endomorphisme f de (E) défini par

$$\begin{cases} f(\vec{i}) = -\vec{i} + 2\vec{k} \\ f(\vec{j}) = \vec{j} + 2\vec{k}, \\ f(\vec{k}) = 2\vec{i} + 2\vec{j}. \end{cases}$$

Démontrer que le noyau de f est une droite vectorielle (E_1) de (E). Donner une base $\{\vec{e}_1\}$ de (E_1) .

Démontrer que l'image de f est un plan vectoriel (E_2) de (E). Déterminer une base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ de (E) telle que $\{\vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ soit une base de (E_2) .

EXERCICE 2

Soit f l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par

$$f(x) = \frac{1 - e^x}{1 + e^x}.$$

Étudier les variations de f et construire sa représentation graphique.

Quelle est l'image \mathbb{R}' de \mathbb{R} par l'application f ?

Démontrer que l'application g de \mathbb{R} dans \mathbb{R}' définie par $g(x) = f(x)$ est bijective.

Soit $h = g^{-1}$ l'application réciproque. Calculer $h(x)$.

PROBLÈME

On considère un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'axes Ox et Oy .

1. a. On désigne par \mathcal{H} l'homothétie de centre A, de coordonnées $(a; 0)$, et de rapport $k > 0$. Soit M un point du plan, d'affixe $z = x + iy$. On note $M_1 = \mathcal{H}(M)$.

Donner l'expression de z_1 affixe de M_1 , en fonction de z, a et k .

- b. On désigne par \mathcal{R} la rotation de centre O et d'angle θ . On appelle u le nombre complexe de module 1 et d'argument θ .

Soit $\mathcal{F} = \mathcal{R} \circ \mathcal{H}$. On note $M' = \mathcal{F}(M)$. Soit $z' = x' + iy'$ l'affixe de M' .

Démontrer que $z' = kuz + au(1 - k)$. Indiquer la nature de la transformation \mathcal{F} .

Déterminer l'affixe de son point invariant, I, lorsque \mathcal{F} n'est pas la transformation identique.

2. On suppose dans la suite que $u = i$ et $a = 5$.
Calculer les coordonnées $(\alpha ; \beta)$ du point I en fonction de k . Déterminer l'ensemble des points I lorsque k décrit l'ensemble des réels positifs.
(On remarquera que $\alpha = k\beta = 0$.)
Déterminer les points I dont les deux coordonnées sont des entiers relatifs.
3. On suppose maintenant $u = i$, $a = 5$ et $k = 3$.
Calculer les coordonnées du point M' en fonction des coordonnées de M .
Soit P le point de coordonnées $(3; 2)$. Déterminer l'ensemble des points M tels que les trois points M, M' et P soient alignés.