

☞ Baccalauréat C Amérique du Nord juin 1981 ☞

EXERCICE 1

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation

$$z^2 - 4(3 + 2i)z + 3(5 + 12i) = 0.$$

On notera z_A la racine ayant le plus petit module et z_B l'autre.

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation

$$2z^2 - (6 + 19i)z - 35 + 15i = 0.$$

On notera z_C la racine imaginaire pure et z_D l'autre.

2. Si A, B, C et D sont les images respectives de z_A, z_B, z_C et z_D dans le plan complexe, montrer qu'il existe une similitude plane inverse s telle que $s(A) = C$ et $s(B) = D$. En donner les éléments caractéristiques.

EXERCICE 2

Trois entiers naturels a, b, c s'écrivent dans un système de base inconnue n , respectivement 7, 238, 1541.

1. Déterminer n pour que $c = ab$, sachant que n est premier.
2. Écrire les nombres dans le système décimal.
Résoudre dans \mathbb{Z}^2 l'équation $ax + by = 1$.

PROBLÈME

Partie A

On considère la fonction

$$f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2} \left(x + \frac{4}{x} \right)$$

1. Étudier cette fonction.
Construire soigneusement sa courbe représentative (H) dans un repère orthonormé. (Unité : 2 cm sur chaque axe.)
2. x_0 étant un réel strictement positif, calculer l'aire de la surface limitée par la droite d'équation $x = 2$, la droite d'équation $x = x_0$, la courbe (H) et son asymptote oblique. Cette aire admet-elle une limite quand x_0 tend vers 0, vers $+\infty$?
3. Montrer que f définit une bijection de $]0; 2]$ sur $[2; +\infty[$ et déterminer sa bijection réciproque g .

4. Construire la courbe représentative de g dans le même repère que la courbe (H) et en déduire

$$\int_2^4 g(x) dx.$$

Partie A

On considère le mouvement plan défini dans le repère ci-dessus par

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 2^{t-1} + 2^{1-t}, \quad t \geq 0 \end{cases}$$

- Déterminer la trajectoire.
- Donner les coordonnées du vecteur vitesse et du vecteur accélération.
- Déterminer la position initiale du mobile (c'est-à-dire à l'instant $t = 0$), son vecteur vitesse initiale et son vecteur accélération initiale.
- Indiquer sur quelle partie de la trajectoire le mouvement est accéléré, retardé.

Partie C

- Montrer que la courbe (H), rapportée à ses asymptotes, a une équation de la forme $XY = k$.
En déduire les équations, dans le repère initial, des axes de symétrie de la courbe (H). Vérifier qu'ils sont orthogonaux.
- La courbe (H) étant rapportée à ses axes de symétrie, en déterminer une équation.

Partie D

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{4}{u_n} \right).$$

si $n \geq 1$ et de premier terme $u_1 = \frac{1}{2}$.

- Montrer que tous les termes de la suite sont bien définis et strictement positifs.
- On pose $v_n = \frac{-2 + u_n}{2 + u_n}$ pour tout n supérieur ou égal à 1.
Calculer v_n en fonction de v_{n-1} puis de v_1 .
En déduire la limite de v_n quand n tend vers $+\infty$ puis celle de u_n quand n tend vers $+\infty$.
- Redessiner la branche de la courbe (H) correspondant à $x > 0$ et la droite d'équation $y = x$.
Placer les points $M_1(u_1, u_2)$, $M_2(u_2, u_3)$ et $M_3(u_3, u_4)$.

4. D'une manière plus générale on considère la suite définie par

$$w_{n+1} = \frac{1}{2} \left(w_n + \frac{a^2}{w_n} \right).$$

avec a strictement positif et $w_1 \geq a$.

Montrer par récurrence que $w_n \leq w_{n-1}$ et $a \leq w_n$.

Établir la convergence de la suite w_n et calculer sa limite.

N.B. - Les parties A, C et D sont indépendantes les unes des autres.