

Baccalauréat C Amérique du Nord juin 1984

EXERCICE 1

4 POINTS

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par A, B et M les points d'affixes respectives $-1, -2$, et z , où z représente un nombre complexe différent de -1 et de -2 .

Posons $Z = \frac{z+2}{z+1}$;

$|Z|$ désigne le module de Z et $\arg Z$ désigne la mesure de l'argument de Z appartenant à $[-\pi; \pi[$.

1. Justifier que $|Z| = \frac{BM}{AM}$ et que $\arg Z$ est une mesure, en radians de l'angle orienté $(\widehat{MA, MB})$ en utilisant la définition et les propriétés du module et de l'argument d'un nombre complexe.
2. Utiliser le rappel ci-dessus pour déterminer géométriquement les ensembles suivants :
 - E_1 est l'ensemble des points M dont l'affixe z est telle que Z est réel,
 - E_2 est l'ensemble des points M dont l'affixe z est telle que Z est imaginaire pur,
 - E_3 est l'ensemble des points M dont l'affixe z est telle que Z est élément de $\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R} / x < 0\}$.
 - E_4 est l'ensemble des points M dont l'affixe z est telle que $\arg Z = +\frac{\pi}{2}$.
 - E_5 est l'ensemble des points M dont l'affixe z est telle que $|Z| = 1$.
3. Déterminer l'ensemble E_6 des points M dont l'affixe z est telle que $|Z| = 2$.

EXERCICE 2

4 POINTS

On appelle θ la fonction numérique de la variable réelle définie par

$$\theta(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln(1+x).$$

1. h désigne la fonction numérique de la variable réelle définie par

$$h(x) = x - \ln(1+x).$$

Étudier le sens de variation de h et le signe de $h(x)$.

2. Quel est l'ensemble de définition de θ , D ?
 Quelle est la limite de $\theta(x)$ quand x tend vers $+\infty$?
 Quelle est la limite de $\theta(x)$ quand x tend vers -1 ?
 On désigne par F l'application de $D \cup \{-1\}$ vers \mathbb{R} définie par

$$\begin{cases} F(-1) & = & 0 \\ F(x) & = & \theta(x), \forall x \in D \cup \{-1\}. \end{cases}$$

Étudier la dérivabilité en -1 de F .

3. Quelle est la limite de $\theta(x)$ quand x tend vers 0?

On désigne par f l'application de $D \cup \{-1\}$ vers \mathbb{R} définie par

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = F(x), \forall x \in D \cup \{-1\}. \end{cases}$$

Étudiez la continuité et la dérivabilité en 0 de f .

4. Étudier les variations de f en utilisant en particulier 1.

Construire la courbe représentative de f .

PROBLÈME

12 POINTS

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

À tout nombre réel m , on associe :

- la translation t_m de vecteur $m \vec{i}$,
- l'affinité orthogonale a_m , d'axe la droite de repère (O, \vec{i}) et de rapport e^{-m} . On note T_m l'application $t_m \circ a_m$.

Partie A

1. a. Préciser T_0 .

b. Démontrer l'égalité

$$t_m \circ a_m = a_m \circ t_m.$$

c. Démontrer que T_m est une bijection de P sur P, et expliciter la bijection réciproque T_m^{-1} .

2. a. Démontrer que si M a pour coordonnées $(x; y)$, les coordonnées $(x'; y')$ de $T_m(M)$ sont

$$x' = x + m \quad \text{et} \quad y' = e^{-m}y.$$

b. On désigne par (Γ) la courbe d'équation $y = e^{-x}$; démontrer l'égalité

$$T_m(\Gamma) = (\Gamma).$$

3. On désigne par (γ) le cercle de centre O et de rayon 1.

a. Déterminer une équation de $T_m(\gamma)$.

Dans le cas où m n'est pas nul, on constatera que $T_m(\gamma)$ est une ellipse dont on précisera l'axe focal et les sommets; justifier que l'un des sommets de l'ellipse $T_m(\gamma)$ appartient à (Γ) .

b. Construire sur le même schéma les courbes (Γ) , (γ) , $T_{\frac{1}{2}}(\gamma)$ et $T_{-1}(\gamma)$. (On ne demande que les dessins des courbes).

Partie B

On considère l'application f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par

$$\begin{cases} \forall x \in [0; 2], & f(x) = x^2(2-x) \\ \forall x \in \mathbb{R}, & f(x+2) = f(x). \end{cases}$$

1. Étudier la restriction f_0 de f à l'intervalle $[0; 2]$ et construire la courbe représentative de f_0 .

Comment peut-on en déduire la courbe représentative de la restriction de f à l'intervalle $[2n; 2n+2]$ où n est élément de \mathbb{R} ?

2. Démontrer que

$$\forall x \in [2n; 2n+2], \quad f(x) = (x-2n)^2(2n+2-x).$$

3. Est-ce que f est continue sur \mathbb{R} ? Est-ce que f est dérivable sur \mathbb{R} ?

Partie C

On considère l'application g de $[0 ; +\infty[$ dans \mathbb{R} définie par :

$$g(x) = e^{-x} f(x).$$

1. On note g_0 la restriction de g à l'intervalle $[0 ; 2]$.
 - a. Étudier les variations de g_0 et construire sa courbe représentative \mathcal{C}_0 .
 - b. Calculer $A_0 = \int_0^2 g_0(x) dx$.
2. a. n étant un entier naturel et x un nombre réel positif ou nul, démontrer que

$$g(x+2) = e^{-2} g(x),$$

puis exprimer $g(x+2n)$ en fonction de $g(x)$.

- b. Démontrer que la courbe représentative \mathcal{C}_n de la restriction de g à l'intervalle $[2n ; 2n+2]$ est l'image de \mathcal{C}_0 par T_{2n} .
- c. Démontrer que $A_n = \int_{2n}^{2n+2} g(x) dx = e^{-2} A_0$.
- d. On note : $S_n = \sum_{p=0}^n A_p$: calculer S_n en fonction de n et de A_0 ; justifier que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.

N.B. La partie B est indépendante du A