

🌀 Baccalauréat C Amérique du Nord juin 1989 🌀

EXERCICE 1

5 POINTS

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormal direct d'origine O.

On note A et B les points ayant respectivement pour affixes 1 et i.

À tout point M d'affixe z on associe le point N d'affixe iz .

- Identifier la transformation du plan ainsi définie.
 - Lorsque M est distinct de A, déduire de a. une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN})$.
- Déterminer et représenter sur une figure l'ensemble E des points M du plan distincts de A et B tels que MBN soit un triangle rectangle en B.
- On se propose de déterminer le lieu D du milieu I du segment [MN] lorsque M parcourt E.

a. Première méthode

Lorsque M appartient à E prouver que les points M, B et N appartiennent au cercle de centre I passant par O.

Tracer ce cercle. En déduire D et construire D.

b. Deuxième méthode

Déterminer une similitude directe S de centre O telle que, pour tout point M du plan, $S(M) = I$.

En déduire D.

EXERCICE 2

4 POINTS

Dans une urne, il y a n boules rouges et $2n$ boules blanches.

On tire p boules au hasard sans remise.

- Si $n = 5$ et $p = 4$, quelles sont les probabilités :
 - d'obtenir deux boules rouges et deux boules blanches?
 - d'obtenir au moins une boule blanche?On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.
- Si n est un entier quelconque et $p = 2$.
 - Quelle est la probabilité p_n d'obtenir deux boules de couleurs différentes?
 - Quel est le sens de variation de la suite (p_n) ?
 - Déterminer la limite de cette suite.

PROBLÈME

11 POINTS

Dans ce problème, la partie A. a pour objectif d'encadrer l'intégrale

$$J(u) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - u^2 \cos^2 t} dt, \text{ où } u \text{ est un nombre réel donné tel que } 0 \leq u \leq 1.$$

On ne cherchera pas à calculer $J(u)$.

Dans la partie B, on appliquera le résultat obtenu en A, pour encadrer la longueur d'une ellipse.

Partie A

1. Soit h un nombre réel tel que $0 \leq h \leq 1$.

a. Établir que :

$$1 - \frac{h}{2} - \sqrt{1-h} = \frac{h^2}{4} \cdot \frac{1}{\varphi(h)},$$

$$\text{où : } \varphi(h) = 1 - \frac{h}{2} + \sqrt{1-h}.$$

b. Étudier le sens de variation de φ sur $[0; 1]$.

c. En déduire la double inégalité :

$$1 - \frac{h}{2} - \frac{h^2}{2} \leq \sqrt{1-h} \leq \frac{h}{2}. \quad (1)$$

2. a. Calculer les deux intégrales :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \, dt.$$

b. À l'aide de (1), établir la double inégalité, valable pour tout élément u de $[0; 1]$:

$$\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{u^2}{4} - \frac{3}{16} u^4 \right) \leq J(u) \leq \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{u^2}{4} \right). \quad (2)$$

Partie B

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère l'ellipse (E) définie par la représentation paramétrique qui à tout réel $t \in [0; 2\pi]$ associe : $x(t) = a \cos t$ et $y(t) = b \sin t$, où $0 < b < a$.

1. On admet que la longueur L de cette ellipse (E) est donnée par :

$$L = \int_0^{2\pi} \left\| \overrightarrow{V}(t) \right\| dt,$$

où $\overrightarrow{V}(t)$ est le vecteur dérivé à l'instant t et $\left\| \overrightarrow{V}(t) \right\|$ sa norme.

a. Expliciter les coordonnées de $\overrightarrow{V}(t)$.

b. En déduire que $L = 4aJ(e)$, où e désigne l'excentricité de (E) et J est définie au début du problème.

c. Application numérique : $a = \frac{9}{2}$ et $b = 4$.

En utilisant (2), donner un encadrement de la longueur L de cette ellipse, d'amplitude 0,25.

2. a. Soit M la longueur du cercle de centre O et de rayon $\frac{a+b}{2}$.

Exprimer M en fonction de a et e .

b. En encadrant $\sqrt{1 - e^2}$ grâce à (1), montrer que :

$$|M - L| \leq \frac{\pi a e^4}{2}.$$