

☞ Baccalauréat C Amérique du Nord juin 1987 ☞

EXERCICE 1

4 POINTS

On considère l'application de $\mathbb{C} - \{-i\}$ dans \mathbb{C} définie par

$$Z = f(z) = \frac{z-i}{iz-1}.$$

On note m l'image de z , A celle de i , et B celle de $-i$.

1. Interpréter géométriquement le module et l'argument de $\frac{z-i}{iz-1}$.
2. Déterminer et construire l'ensemble (\mathcal{E}_1) des points m tel que Z soit réel.
3. Déterminer et construire l'ensemble (\mathcal{E}_2) des points m tel que $|Z| = 1$.

EXERCICE 2

4 POINTS

Calculer une primitive de chacune des fonctions f et g de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par :

$$f(x) = \sin^4 x \quad \text{et par :} \quad g(x) = \cos^3 x.$$

PROBLÈME

12 POINTS

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, (unité 5 cm).

A. Soit g l'application de $]0; +\infty[$ dans \mathbb{R} définie par :

$$g(x) = x \ln x.$$

1. Étudier les variations de g .
2. Déterminer les limites de g aux bornes de son intervalle de définition. Montrer que g admet un prolongement par continuité en 0.
3. Tracer la courbe représentative \mathcal{C}_g de g dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
On précisera l'allure de \mathcal{C}_g au voisinage de l'origine.

B. - On considère maintenant l'application f de $[0; +\infty[$ dans \mathbb{R} définie par :

$$\begin{cases} f(0) = 0, \\ f(x) = |x \ln(x)| \quad \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

1. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative \mathcal{C}_f dans le même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
2. Calculer, en cm^2 , l'aire de la partie de plan comprise entre \mathcal{C}_f , la première bissectrice et les droites d'équation $x = \frac{1}{e}$ et $x = e$.

3. Démontrer qu'il existe un réel unique α appartenant à l'intervalle $]1; e[$ tel que $f(\alpha) = \frac{1}{e}$.
Placer le point correspondant sur la courbe \mathcal{C}_f .
Donner, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée par défaut de α à 10^{-2} près.

C. - On définit la suite numérique (u_n) par son premier terme u_0 , (u_0 étant réel strictement positif et différent de 1), et pour tout n , par $u_{n+1} = f(u_n)$, où f désigne l'application définie au B.

1. Pour quelles valeurs de u_0 la suite (u_n) est-elle stationnaire?
2. On choisit $u_0 \in \left]0; \frac{1}{e}\right[$. Démontrer que
 - a. $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < \frac{1}{e}$.
 - b. La suite (u_n) est strictement croissante.
 - c. La suite (u_n) converge vers $\frac{1}{e}$.
3. On choisit maintenant $u_0 \in \left]\frac{1}{e}; 1\right[$. Montrer que $u_1 \in \left]0; \frac{1}{e}\right[$. La suite (u_n) est-elle convergente?
4.
 - a. Pour $u_0 > e$ montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.
 - b. Montrer que, pour tout x supérieur à e , on a $f'(x) \geq 2$.
 - c. En déduire que $u_{n+1} - u_n \geq 2(u_n - u_{n-1})$.
 - d. Montrer que $u_{n+1} - u_n \geq 2^n(u_1 - u_0)$.
 - e. Montrer que $u_{n+1} \geq u_0 + (u_1 - u_0)(2^{n+1} - 1)$. En déduire la nature de la suite (u_n) .
5. Que dire de la suite (u_n) si on choisit $u_0 = \alpha$, α étant la valeur introduite au B. 3?