

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat S Amérique du Nord 3 juin 2010 ∞

A. P. M. E. P.

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives :

$$A(1; -2; 4) \quad B(-2; -6; 5) \quad C(-4; 0; -3).$$

- Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
  - Démontrer que le vecteur  $\vec{n}(1; -1; -1)$  est un vecteur normal au plan (ABC).
  - Déterminer une équation du plan (ABC).
- Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par le point O et orthogonale au plan (ABC).
  - Déterminer les coordonnées du point  $O'$  projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).
- On désigne par H le projeté orthogonal du point O sur la droite (BC).  
Soit  $t$  le réel tel que  $\vec{BH} = t\vec{BC}$ .
  - Démontrer que  $t = \frac{\vec{BO} \cdot \vec{BC}}{\|\vec{BC}\|^2}$ .
  - En déduire le réel  $t$  et les coordonnées du point H.

EXERCICE 2

3 points

Commun à tous les candidats

Une urne contient des boules indiscernables au toucher.

20 % des boules portent le numéro 1 et sont rouges.

Les autres portent le numéro 2 et parmi elles, 10 % sont rouges et les autres sont vertes.

- On tire une boule au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle soit rouge?
- On a tiré une boule au hasard. Elle est rouge.  
Montrer que la probabilité qu'elle porte le numéro 2 est égale à  $\frac{2}{7}$ .
- Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2.  
On effectue  $n$  tirages successifs d'une boule avec remise (après chaque tirage la boule est remise dans l'urne).
  - Exprimer en fonction de  $n$  la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des  $n$  tirages.
  - Déterminer l'entier  $n$  à partir duquel la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des  $n$  tirages est supérieure ou égale à 0,99.

**EXERCICE 3****5 points****Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  d'unité graphique 2 cm.

On réalisera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.

On considère les points A d'affixe  $i$ , B d'affixe  $-2i$  et D d'affixe  $1$ .

On appelle E le point tel que le triangle ADE soit équilatéral direct.

Soit  $f$  l'application qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  ( $z \neq i$ ) associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  définie par :

$$z' = \frac{2z - i}{iz + 1}.$$

- Démontrer que le point E a pour affixe  $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 + i)$ .
- Exprimer sous forme algébrique l'affixe du point D' associé au point D par l'application  $f$ .
- (a) Démontrer que, pour tout nombre complexe  $z$  différent de  $i$ ,  $(z' + 2i)(z - i) = 1$ .  
(b) En déduire que pour tout point  $M$  d'affixe  $z$  ( $z \neq i$ ) :

$$BM' \times AM = 1$$

$$\text{et } (\vec{u}, \overrightarrow{BM'}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) + k \times 2\pi \text{ où } k \text{ est un entier relatif.}$$

- (a) Démontrer que les points D et E appartiennent au cercle (C) de centre A et de rayon  $\sqrt{2}$ .  
(b) En utilisant les résultats de la question 3. b., placer le point E' associé au point E par l'application  $f$ . On laissera apparents les traits de construction.
- Quelle est la nature du triangle BD' E' ?

**EXERCICE 3****5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité****Partie A**

On cherche l'ensemble des couples d'entiers relatifs  $(x, y)$  solutions de l'équation

$$(E): 16x - 3y = 4.$$

- Vérifier que le couple  $(1, 4)$  est une solution particulière de (E).
- Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

**Partie B**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère la transformation  $f$  du plan, qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$ , associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  définie par

$$z' = \sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{8}} z.$$

On définit une suite de points  $(M_n)$  de la manière suivante :

le point  $M_0$  a pour affixe  $z_0 = i$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $M_{n+1} = f(M_n)$ .

On note  $z_n$  l'affixe du point  $M_n$

Les points  $M_0, M_1, M_2$  et  $M_3$  sont placés sur la figure donnée en annexe page 6.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation  $f$ .
2. On note  $g$  la transformation  $f \circ f \circ f \circ f$ .
  - (a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation  $g$ .
  - (b) En déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,  $OM_{n+4} = 4OM_n$  et que
 
$$\left(\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OM_{n+4}}\right) = -\frac{\pi}{2} + k \times 2\pi$$
 où  $k$  est un entier relatif.
  - (c) Compléter la figure en construisant les points  $M_4, M_5$  et  $M_6$ .
3. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $z_n = \left(\sqrt{2}\right)^n e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3n\pi}{8}\right)}$ .
4. Soient deux entiers naturels  $n$  et  $p$  tels que  $p \leq n$ .
  - (a) Exprimer en fonction de  $n$  et  $p$  une mesure de  $\left(\overrightarrow{OM_p}, \overrightarrow{OM_n}\right)$ .
  - (b) Démontrer que les points  $O, M_p$  et  $M_n$  sont alignés si et seulement si  $n - p$  est un multiple de 8.
5. Déterminer l'ensemble des entiers naturels  $n$  tels que le point  $M_n$  appartienne à la demi-droite  $]Ox)$ . On pourra utiliser la partie A.

#### EXERCICE 4

8 points

#### Commun à tous les candidats

À tout entier naturel  $n$  non nul, on associe la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f_n(x) = \frac{4e^{nx}}{e^{nx} + 7}.$$

On désigne par  $\mathcal{C}_n$  la courbe représentative de la fonction  $f_n$  dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Les courbes  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  et  $\mathcal{C}_3$  sont données en annexe.

**Partie A :** Étude de la fonction  $f_1$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f_1(x) = \frac{4e^x}{e^x + 7}$

1. Vérifier que pour tout réel  $x$ ,  $f_1(x) = \frac{4}{1 + 7e^{-x}}$ .
2. (a) Démontrer que la courbe  $\mathcal{C}_1$  admet deux asymptotes dont on précisera des équations.  
 (b) Démontrer que la fonction  $f_1$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .  
 (c) Démontrer que pour tout réel  $x$ ,  $0 < f_1(x) < 4$ .
3. (a) Démontrer que le point  $I_1$  de coordonnées  $(\ln 7 ; 2)$  est un centre de symétrie de la courbe  $\mathcal{C}_1$ .  
 (b) Déterminer une équation de la tangente  $(T_1)$  à la courbe  $\mathcal{C}_1$  au point  $I_1$ .  
 (c) Tracer la droite  $(T_1)$ .

4. (a) Déterminer une primitive de la fonction  $f_1$  sur  $\mathbb{R}$ .
- (b) Calculer la valeur moyenne de  $f_1$  sur l'intervalle  $[0; \ln 7]$ .

**Partie B :** Étude de certaines propriétés de la fonction  $f_n$ .

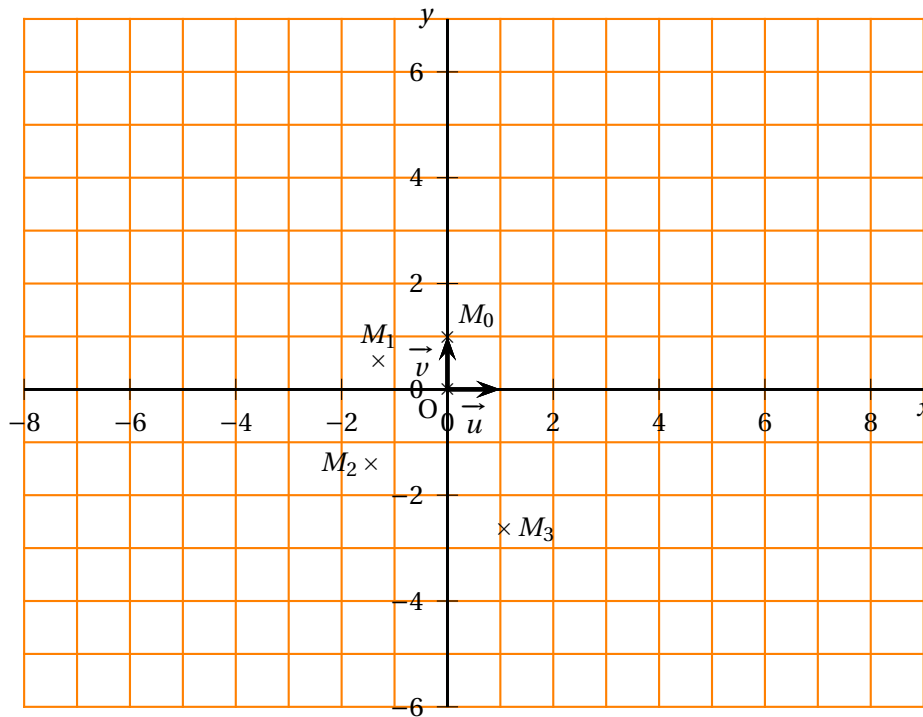
1. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul le point  $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$  appartient à la courbe  $\mathcal{C}_n$ .
2. (a) Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul la courbe  $\mathcal{C}_n$  et la droite d'équation  $y = 2$  ont un unique point d'intersection dont on précisera l'abscisse.  
On note  $I_n$  ce point d'intersection.
- (b) Déterminer une équation de la tangente  $(T_n)$  à la courbe  $\mathcal{C}_n$  au point  $I_n$ .
- (c) Tracer les droites  $(T_2)$  et  $(T_3)$ .
3. Soit la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  non nul par

$$u_n = \frac{n}{\ln 7} \int_0^{\frac{\ln 7}{n}} f_n(x) dx.$$

Montrer que la suite  $(u_n)$  est constante.

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve

**Exercice 3 (enseignement de spécialité)**



**Exercice 4**

