

## ∞ Baccalauréat C Amérique du Sud novembre 1979 ∞

### EXERCICE 1

Résoudre dans le corps  $\mathbb{C}$  des nombres complexes l'équation (E) :

$$\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1.$$

Placer, dans le plan complexe, les points images des solutions de (E) et démontrer que ces points sont situés sur un même cercle que l'on déterminera.

### EXERCICE 2

Soit  $f$  la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\text{Log}x - 2}{\text{Log}x - 1} & \text{si } x \in ]0; e[ \cup ]e; +\infty[ \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

$\text{Log } x$  désignant le logarithme népérien de  $x$ .

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  sur son ensemble de définition  $D$ .
2. Étudier les variations de  $f$ . Tracer sa courbe représentative (C) dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . (Unité conseillée : 2 cm).
3. Montrer que la restriction  $f_1$  de  $f$  à  $]0; e[$  est une bijection de  $]0; e[$  sur  $]1; +\infty[$ .  
Préciser les propriétés de la fonction réciproque  $h$  de  $f_1$  (ensemble de définition, continuité, sens de variations), et tracer sa courbe représentative (C') dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Montrer que  $h$  est dérivable au point 2 et calculer le nombre dérivé de  $h$  en ce point.

### PROBLÈME

Selon l'habitude, pour tout endomorphisme  $\psi$  d'un espace vectoriel  $V$ , on pose

$$\psi^0 = \text{Id}_V \quad \text{et} \quad \psi^{n+1} = \psi \circ \psi^n$$

pour tout entier naturel  $n$ ; de même, si  $M$  est une matrice  $2 \times 2$ , on pose

$$M^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^{n+1} = M \times M^n$$

On désigne par  $V$  un plan vectoriel rapporté à une base  $(\vec{i}, \vec{i})$ .

#### Partie A

On considère l'endomorphisme  $\varphi$  de  $V$  dont la matrice sur la base  $(\vec{i}, \vec{i})$  est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Trouver un nombre réel  $a$  tel qu'il existe au moins un vecteur non nul  $\vec{u}$  de  $V$  tel que  $\varphi(\vec{u}) = a\vec{u}$ .

Déterminer l'ensemble  $E$  des vecteurs  $\vec{v}$  de  $V$  tels que  $\varphi(\vec{v}) = \vec{v}$ .

2. a. Démontrer que les vecteurs  $\vec{e}_1 = 2\vec{i} + \vec{j}$  et  $\vec{e}_2 = \vec{j}$  forment une base de  $V$ .  
b. Démontrer que, sur cette base,  $\varphi$  a pour matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- c. Calculer  $B^2$ , puis  $B^n$  pour tout entier naturel  $n$ .  
3. Soit  $\rho$  l'endomorphisme de  $V$  tel que

$$\rho(\vec{i}) = \vec{e}_1 \quad \text{et} \quad \rho(\vec{j}) = \vec{e}_2$$

et déterminer la matrice  $P$  de  $\rho$  sur la base  $(\vec{i}, \vec{j})$  et calculer l'inverse  $\rho^{-1}$  de  $\rho$ .

Vérifier que  $A = PBP^{-1}$ , et en déduire que  $A^n = PB^nP^{-1}$  pour tout entier naturel  $n$ .  
Expliciter  $A^n$  en fonction de  $n$ .

4. Étant donné deux nombres réels  $u_0$  et  $v_0$ , on définit deux suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par les relations de récurrence

$$\begin{cases} u_n &= 3u_{n-1} - 4v_{n-1}, \\ v_n &= u_n - v_{n-1}, \end{cases}$$

et l'on pose  $w_n = u_n \vec{i} + v_n \vec{j}$ , pour tout  $n$ .

- a. Exprimer  $w_n$  à l'aide de  $\varphi$  et de  $w_0$ , et en déduire une expression de  $u_n$  à l'aide de  $u_0$ ,  $v_0$  et  $n$ .  
b. Pour  $(u_0, v_0) = (2, 2)$  déterminer la plus petite valeur de  $n$  telle que  $|u_n|$  et  $|v_n|$  soient tous deux strictement supérieurs à  $10^6$ .

### Partie B

On désigne par  $\mathcal{D}$  l'ensemble des fonctions numériques définies et dérivables sur  $\mathbb{R}$ ; on rappelle que la multiplication par un nombre réel et l'addition usuelles font de  $\mathcal{D}$  un espace vectoriel. Étant donné un nombre réel  $k$ , on note  $\mathcal{E}_k$  l'ensemble des fonctions  $f$  de  $\mathcal{D}$  qui vérifient

$$f'(x) = f(x) - 2ke^x$$

pour tout nombre réel  $x$ .

1. À tout élément  $f$  de  $\mathcal{D}$ , on associe la fonction  $g$  définie par  $g(x) = f(x)e^{-x}$  pour tout réel  $x$ .  
a. Montrer que  $g$  appartient à  $\mathcal{D}$ .  
b. Démontrer que  $f$  appartient à  $\mathcal{E}_k$  si, et seulement si,  $g'(x) = -2k$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ .

- c. En déduire la forme générale des fonctions  $f$  de  $\mathcal{E}_k$  et préciser en particulier l'ensemble  $\mathcal{E}_0$  obtenu pour  $k = 0$ .
2. Trouver l'ensemble des couples  $(F, G)$  d'éléments de  $\mathcal{D}$  qui satisfont les relations

$$F'(x) = 3F(x) - 4G(x) \quad \text{et} \quad G(x) = F(x) - G(x).$$

pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ .

(On pourra déterminer d'abord deux fonctions auxiliaires  $F_1$  et  $G_1$  liées à  $F$  et  $G$  par les relations  $F = 2F_1$  et  $G = F_1 + G_1$ ).