Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Amérique du Sud novembre 1982 ∾

EXERCICE 1 **4 points**

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie par

$$f(x) = -2 + \text{Log}\left|x^2 - 4\right| \quad \text{(où Log désigne le logarithme népérien).}$$

1. Étudier les variations de f et la représenter dans un repère orthonormé.
Résoudre $f(x) = 0$.

2. Soit I $=]-\infty\,;\,-2[$ et soit f_1 la restriction de f à I.
Montrer que f_1 est une bijection de I vers $\mathbb{R}$ et expliciter la bijection réciproque f^{-1}.

EXERCICE 2 **4 points**

1. Soit a et b deux entiers naturels dont la somme et le produit ont pour PGCD le carré d'un nombre premier p.

a. Montrer que p^2 divise a^2 (on pourra remarquer que $a^2 = a(a+b) - ab$). En déduire que p divise a. Montrer que p divise b.

b. Démontrer que le PGCD de a et b est, soit p, soit p^2.

2. On cherche à déterminer les entiers naturels a et b tels que
PGCD $(a+b,\ ab) = 49$ et PPCM $(a,\ b) = 231$.

a. Soit a et b deux tels entiers. Montrer que leur PGCD est 7.

b. Quelles sont les solutions du problème posé ?

PROBLÈME **12 points**

Partie A

Soit f la fonction d'une variable numérique réelle définie par

$$f(x) = \frac{x+4}{x-2}.$$

1. Soit P un plan affine euclidien orienté, muni d'un repère orthonormé direct
R $= \left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Étudier les variations de f et la représenter graphiquement dans P.
On appellera C la courbe ainsi obtenue.

2. Déterminer l'image par f de l'intervalle $]-\infty\,;\,2[$.

3. Vérifier que pour tout réel x différent de 2, on a

$$f(x) = 1 + \frac{6}{x-2}.$$

En déduire les points de C dont les deux coordonnées sont des entiers relatifs.

4. Pour chaque entier $n \geqslant 1$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{n}\,\frac{k+4n}{k-2n}.$$

Montrer que S_n est une somme de Riemann de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~1]$. En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

Partie B

Soit u_1 un nombre réel tel que $u_1 < 2$.

1. Montrer (en utilisant la question A 2.) que l'on peut définir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels, dont le premier terme est le nombre u_1 donné et telle que

$$\forall n \geqslant 2, \quad u_{n+1} = \frac{u_n+4}{u_n-2}.$$

2. Pour quelle(s) valeur(s) de u_1 la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle constante ? Retrouver ce résultat en utilisant la courbe C tracée dans la partie A.

3. Pour chaque entier $n \geqslant 1$, on pose

$$v_n = \frac{u_n+1}{u_n+4}.$$

Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Partie C

1. Déterminer les images respectives $\overrightarrow{I}$ et $\overrightarrow{J}$ des vecteurs $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{\jmath}$ pour la rotation vectorielle dont une mesure de l'angle est $\frac{\pi}{4}$.

2. Soit $\text{R}' = \left(\text{O}'~;~\overrightarrow{I},~\overrightarrow{J}\right)$, O′ étant défini par

$$\overrightarrow{\text{OO}'} = 2\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}.$$

Déterminer une équation de la courbe C dans le repère R′.

Déterminer les éléments (foyers, sommets et excentricité) de cette conique C.

Partie D

À tout nombre complexe z différent de 2, on associe le nombre complexe

$$Z = \frac{z+4}{z-2}.$$

1. Exprimer les parties réelle X et imaginaire Y de Z en fonction des parties réelle x et imaginaire y de z.

2. On rappelle qu'à tout nombre complexe z est associé un point M de P, qui est son image.

Déterminer l'ensemble E des points M de P, images de nombres complexes z tels que Z soit imaginaire pur.

3. Soit λ un nombre réel non nul. Quelle condition doivent vérifier les parties réelle et imaginaire x et y de z pour que les parties réelle et imaginaire X et Y de Z vérifient l'équation

$$Y = \lambda X.$$

Déterminer l'ensemble F_λ des points M de P images des nombres complexes z vérifiant cette condition. Déterminer, lorsque λ décrit $\mathbb{R}^\star$, l'ensemble des centres des courbes F_λ.

Montrer que ces courbes F_λ passent par deux points de P dont les coordonnées sont indépendantes de λ.