

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Amérique du Sud novembre 1984 ∞

EXERCICE 1

points

On considère la fonction numérique de la variable réelle x définie dans \mathbb{R} par :

$$f(x) = e^{-x} \cdot \ln(1 + e^x).$$

Soit (\mathcal{C}) la courbe représentative de f dans le plan affine euclidien P muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Démontrer que : $\frac{X}{X+1} - \ln(1+X) < 0$ pour tout $X > 0$.
En déduire le sens de variation de f .
2. Étudier $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
3. Tracer la courbe (\mathcal{C}) dans le plan P .

EXERCICE 2

points

Soit (u_n) la suite numérique définie sur \mathbb{N} par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & \sqrt{3u_n + 4} \end{cases}$$

1. a. Montrer que (u_n) est majorée par 4.
b. Montrer que (u_n) est strictement croissante.
c. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. a. Montrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n).$$

- b. Retrouver le résultat de 1. c.
- c. Étudier la convergence de la suite (v_n) définie sur \mathbb{N} par :

$$v_n = n^2(4 - u_n).$$

PROBLÈME

points

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $R = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

On note P^* , P privé du point O , et on considère l'application f de P^* dans P qui, au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe

$$z' = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right).$$

Partie A

1. Montrer que f admet deux points invariants.
On appellera A le point invariant dont la partie réelle de l'affixe est positive, B l'autre.
2. Soit k un nombre réel non nul. On considère l'application g_k de \mathbb{R}^* dans \mathbb{R} définie par :

$$g_k(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right).$$

Étudier, suivant les valeurs de k , les variations de g_k et donner les différents tableaux de variation.

3. En déduire l'image par f de :
 Δ^* , la droite (O, \vec{e}_1) privée du point O,
et de D^* , la droite (O, \vec{e}_2) privée du point O.
4. Donner l'expression analytique de f relativement au repère R.

Partie B

Soit α un nombre réel non nul, on note Δ_α la droite d'équation $y = \alpha x$ et Δ_α^* la droite Δ_α privée du point O.

1. Soit H_α la courbe d'équation :

$$x^2 - \frac{y^2}{\alpha^2} = \frac{1}{1 + \alpha^2}.$$

Déterminer la nature de H_α et préciser ses éléments remarquables : centre, axes, sommets, asymptotes, foyers.

2. a. Montrer qu'il existe un nombre réel k non nul tel que, quel que soit le point M de Δ_α^* d'abscisse x dans le repère R, les coordonnées $(x'; y')$ de l'image M' de M par f vérifient :

$$\begin{cases} x' &= g_k(x) \\ y' &= \alpha g_{-k}(x). \end{cases}$$

- b. En déduire que l'image de Δ_α^* par f est incluse dans H_α , puis montrer que l'image de Δ_α^* par f est H_α . (On pourra utiliser le A 2.)
- c. Montrer qu'il existe un réel α' non nul différent de α tel que l'image par f de la droite $\Delta_{\alpha'}^*$, où $\Delta_{\alpha'}^*$ est la droite $\Delta_{\alpha'}$ d'équation $y = \alpha' x$ privée du point O, est H_α .
3. Tracer H_α , Δ_α , $\Delta_{\alpha'}$ pour $\alpha = 1$.

Soit r , un nombre réel strictement positif. On note C_r le cercle de centre O et de rayon r .

Quelle est l'image par f de C_1 ?

On suppose $r \neq 1$.

- a. Montrer que l'image de C_r par f est une ellipse E_r dont on déterminera une équation cartésienne et les éléments remarquables. On vérifiera, en particulier, que ses foyers, indépendants de r , sont les points A et B.
 - b. Montrer qu'il existe un autre cercle $C_{r'}$ de centre O et de rayon r' dont l'image par f est E_r .
 - c. Tracer $E_r, C_r, C_{r'}$ pour $r = 2$.
4. Soit M un point de E_r ($r \neq 1$). On note T la tangente en M à E_r , M_1 le symétrique de A par rapport à T et M_2 le projeté orthogonal de A sur T . Trouver l'ensemble des points M_1 quand M décrit E_r .
En déduire l'ensemble des points M_2 quand M décrit E_r .