

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat S Amérique du Sud ∞
Novembre 2010

A. P. M. E. P.

Exercice 1

5 points

Commun à tous les candidats

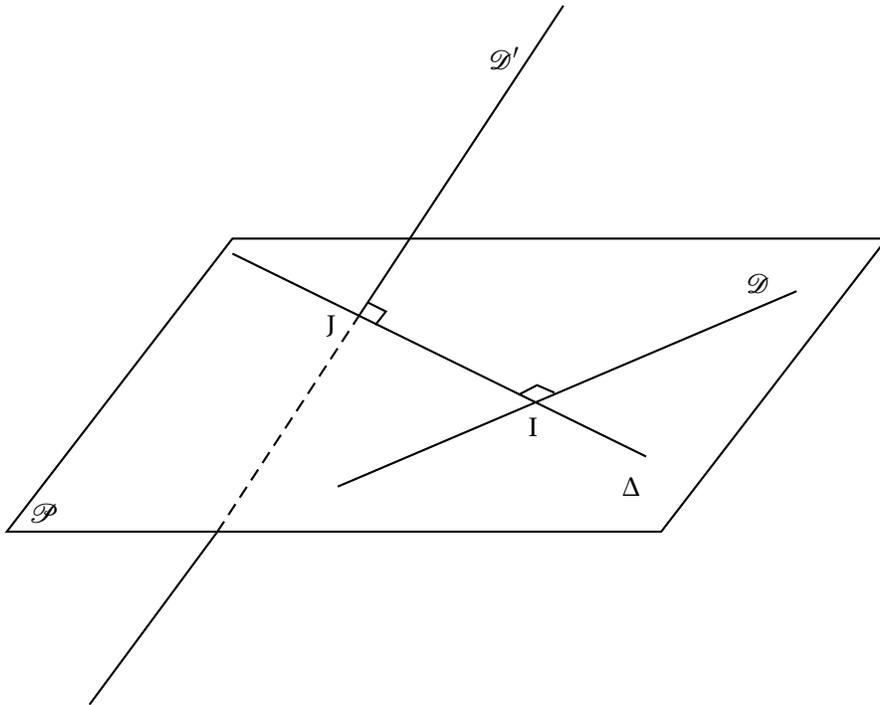
On admet que si \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont deux droites non coplanaires, il existe une unique droite Δ perpendiculaire à \mathcal{D} et \mathcal{D}' . Si Δ coupe \mathcal{D} en le point I et \mathcal{D}' en le point J, la distance IJ est appelée distance de \mathcal{D} à \mathcal{D}' .

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On note \mathcal{D} la droite des abscisses et \mathcal{D}' , la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 3 + 3t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

1. Justifier que les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' ne sont pas coplanaires.
2. On considère la droite Δ perpendiculaire commune à \mathcal{D} et \mathcal{D}' . Prouver qu'il existe deux réels b et c tels que le vecteur $\vec{w} = b\vec{j} + c\vec{k}$ soit un vecteur directeur de Δ .
3.
 - a. Vérifier que le plan \mathcal{P} d'équation : $-3y + z = 0$ est un plan contenant la droite \mathcal{D} .
 - b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection J de la droite \mathcal{D}' et du plan \mathcal{P} .
 - c. Justifier que la droite passant par J, de vecteur directeur \vec{w} est sécante à \mathcal{D} en un point I et qu'elle est la perpendiculaire commune à \mathcal{D} et \mathcal{D}' .
 - d. En déduire la distance de \mathcal{D} à \mathcal{D}' .



Exercice 2**5 points****Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

Soit A, B et P les points d'affixes respectives $a = 5 + 5i$, $b = 5 - 5i$ et $p = 10$.

On considère un point M , distinct de O, d'affixe z .

On note U le point d'affixe u , image du point M par la rotation R_A de centre A et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{2}$.

On note T le point d'affixe t , image du point M par la rotation R_B de centre B et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.

Soit D le symétrique du point M par rapport à O.

1. Démontrer que l'affixe du point U est $u = i(10 - z)$; exprimer en fonction de z l'affixe du point T puis justifier que le quadrilatère $MUDT$ est un parallélogramme de centre O.
2. Déterminer l'ensemble Γ des points M d'affixe z tels que : $z\bar{z} - 5z - 5\bar{z} = 0$.
Justifier que le quadrilatère OAPB est inscrit dans Γ .
3. On suppose que le point M est distinct de O, A et P. Les points O, M et U sont donc distincts deux à deux.
 - a. Démontrer que les points O, M et U sont alignés si et seulement si $\frac{u}{z} = \frac{\bar{u}}{\bar{z}}$.
 - b. Démontrer que les points O, M et U sont alignés si et seulement si M appartient à Γ .
4. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que OMU soit un triangle isocèle en O. Quelle est dans ce cas la nature du quadrilatère $MUDT$?
5. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $\frac{u}{z}$ soit un imaginaire pur. En déduire la nature du quadrilatère $MUDT$ dans le cas où M est un point de la droite (OP) privée de O et P.
Prouver finalement qu'il existe une unique position du point M tel que $MUDT$ soit un carré.

Exercice 2**5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $A(n) = n^4 + 1$.

L'objet de l'exercice est l'étude des diviseurs premiers de $A(n)$.

1. Quelques résultats
 - a. Étudier la parité de l'entier $A(n)$.
 - b. Montrer que, quel que soit l'entier n , $A(n)$ n'est pas un multiple de 3.
 - c. Montrer que tout entier d diviseur de $A(n)$ est premier avec n .
 - d. Montrer que, pour tout entier d diviseur de $A(n)$:

$$n^8 \equiv 1 \pmod{d}.$$

2. Recherche de critères

Soit d un diviseur de $A(n)$. On note s le plus petit des entiers naturels non nuls k tels que $n^k \equiv 1 \pmod{d}$.

- Soit k un tel entier. En utilisant la division euclidienne de k par s , montrer que s divise k .
- En déduire que s est un diviseur de 8.
- Montrer que si, de plus, d est premier, alors s est un diviseur de $d - 1$. On pourra utiliser le petit théorème de Fermat.

3. Recherche des diviseurs premiers de $A(n)$ dans le cas où n est un entier pair.

Soit p un diviseur premier de $A(n)$. En examinant successivement les cas $s = 1$, $s = 2$ puis $s = 4$, conclure que p est congru à 1 modulo 8.

4. Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Appliquer ce qui précède à la recherche des diviseurs premiers de $A(12)$.

Indication : la liste des nombres premiers congrus à 1 modulo 8 débute par 17, 41, 73, 89, 97, 113, 137, ...

Exercice 3**5 points****Commun à tous les candidats**

Un internaute souhaite faire un achat par l'intermédiaire d'internet. Quatre sites de vente, un français, un allemand, un canadien et un indien présentent le matériel qu'il souhaite acquérir. L'expérience a montré que la probabilité qu'il utilise chacun de ces sites vérifie les conditions suivantes (les initiales des pays désignent les événements « l'achat s'effectue dans le pays ») :

$$P(F) = P(A), \quad P(F) = \frac{1}{2}P(C) \quad \text{et} \quad P(C) = P(I).$$

- Calculer les quatre probabilités $P(F)$, $P(A)$, $P(C)$ et $P(I)$.
- Sur chacun des quatre sites, l'internaute peut acheter un supplément pour son matériel. Ses expériences précédentes conduisent à formuler ainsi les probabilités conditionnelles de cet événement, noté S :

$$P_F(S) = 0,2 \quad ; \quad P_A(S) = 0,5 \quad ; \quad P_C(S) = 0,1 \quad ; \quad P_I(S) = 0,4$$

- Déterminer $P(S \cap A)$.
 - Montrer que $p(S) = \frac{17}{60}$.
 - L'internaute a finalement acheté un supplément. Déterminer la probabilité qu'il l'ait acheté sur le site canadien.
- Sur 1 000 internautes ayant acheté ce matériel, on a établi la statistique suivante :

| | Sites européens | Site canadien | Site indien |
|----------------------|-----------------|---------------|-------------|
| Effectif d'acheteurs | 335 | 310 | 355 |

- a. On note respectivement f_1 , f_2 et f_3 les fréquences associées aux effectifs précédents. On pose :

$$d^2 = \sum_{k=1}^{k=3} \left(f_k - \frac{1}{3} \right)^2. \text{ Calculer } d^2 \text{ puis } 1000d^2.$$

- b. On simule 3 000 fois l'expérience consistant à tirer un nombre au hasard parmi $\{1 ; 2 ; 3\}$ avec équiprobabilité. Pour chacune de ces simulations on obtient une valeur de $1000d^2$. Voici les résultats :

| Minimum | Premier décile | Premier quartile | Médiane | Troisième quartile | Neuvième décile | Maximum |
|---------|----------------|------------------|----------|--------------------|-----------------|---------|
| 0,000 5 | 0,076 3 | 0,211 1 | 0,488 45 | 0,940 1 | 1,510 4 | 5,925 6 |

Au risque 10 %, peut-on considérer que le choix d'un site européen, nord-américain ou asiatique se fait de manière équiprobable ?

Exercice 4**5 points****Commun à tous les candidats**

Le but de l'exercice est de donner un encadrement du nombre I défini par :

$$I = \int_0^1 \frac{x^2 e^x}{1+x} dx.$$

Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$.

1. Étudier les variations de f sur $[0; 1]$.
2. On pose, pour tout entier naturel $S_n = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{5}\right)$.

a. Justifier que pour tout entier k compris entre 0 et 4, on a :

$$\frac{1}{5} f\left(\frac{k}{5}\right) \leq \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} \frac{e^x}{1+x} dx \leq \frac{1}{5} f\left(\frac{k+1}{5}\right)$$

Interpréter graphiquement à l'aide de rectangles les inégalités précédentes.

- b. En déduire que : $\frac{1}{5} S_4 \leq \int_0^1 \frac{e^x}{1+x} dx \leq \frac{1}{5} (S_5 - 1)$.
- c. Donner des valeurs approchées à 10^{-4} près de S_4 et de S_5 respectivement.

En déduire l'encadrement : $1,091 \leq \int_0^1 \frac{e^x}{1+x} dx \leq 1,164$.

3. a. Démontrer que pour tout réel x de $[0; 1]$, on a : $\frac{1}{1+x} = 1 - x + \frac{x^2}{1+x}$.
- b. Justifier l'égalité $\int_0^1 \frac{e^x}{1+x} dx = \int_0^1 (1-x)e^x dx + I$.
- c. Calculer $\int_0^1 (1-x)e^x dx$.
- d. En déduire un encadrement de $I = \int_0^1 \frac{x^2 e^x}{1+x} dx$ d'amplitude strictement inférieure à 10^{-1} .