

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat S Amérique du Sud novembre 2008 ∞

EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points A, B, C d'affixes respectives  $a = -1 + 2i$ ,  $b = 1 + 3i$ ,  $c = 4i$ .

1. Montrer que le triangle ABC est isocèle en A.
2. Soit I le milieu de [BC] et  $z_I$  son affixe.
  - a. Quel est l'ensemble des points M du plan distincts de A dont l'affixe  $z$  est telle que  $\frac{z - z_I}{z - a}$  soit un réel?
  - b. Déterminer l'unique réel  $x$  tel que  $\frac{x - z_I}{x - a}$  soit un réel.
  - c. Soit  $z_{\vec{AI}}$  l'affixe du vecteur  $\vec{AI}$ , donner une forme trigonométrique de  $z_{\vec{AI}}$ .
3.
  - a. Soit G le point d'affixe  $-3$ . Montrer qu'il existe deux rotations de centre G, dont on déterminera les angles, telles que les images de A et I par ces rotations soient toutes deux sur l'axe des réels.
  - b. Soit  $r_1$  la rotation de centre G et d'angle de mesure  $-\frac{\pi}{4}$ .  
Déterminer l'écriture complexe de  $r_1$ .
4. Soit  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  les images respectives de A, B, et C par la rotation  $r_1$ ; soient  $a'$ ,  $b'$  et  $c'$  leurs affixes.  
Quelle est l'image par  $r_1$  de l'axe de symétrie du triangle ABC?  
En déduire que  $b' = \overline{c'}$ .

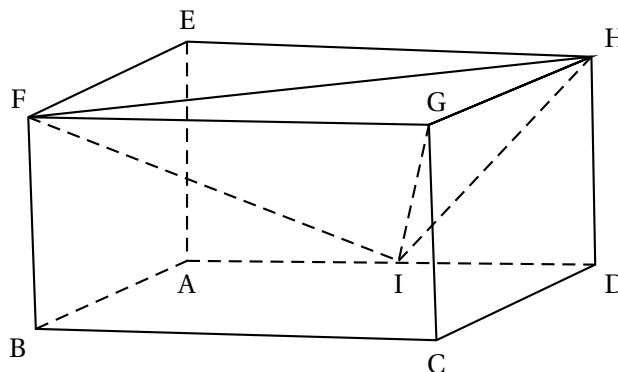
EXERCICE 2

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Une unité de longueur étant choisie dans l'espace, on considère un pavé droit ABCDEFGH tel que :  $AB = 1$ ,  $AD = 2$  et  $AE = 1$ .

On appelle I le milieu de [AD].



L'espace est muni du repère orthonormé  $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AI}; \overrightarrow{AE})$ .

1. Déterminer, dans le repère choisi, les coordonnées des points F, G, H.
2. a. Montrer que le volume  $V$  du tétraèdre GFIH est égal à  $\frac{1}{3}$ .  
b. Montrer que le triangle FIH est rectangle en I.  
En exprimant  $V$  d'une autre façon, calculer la distance  $d$  du point G au plan (FIH).
3. Soit le vecteur  $\vec{n}$  de coordonnées  $(2; 1; -1)$ .  
a. Montrer que le vecteur  $\vec{n}$  est normal au plan (FIH).  
b. En déduire une équation cartésienne du plan (FIH).  
c. Retrouver par une autre méthode la distance  $d$  du point G au plan (FIH).
4. a. La droite (AG) est-elle perpendiculaire au plan (FIH)?  
b. Donner un système d'équations paramétriques de cette droite.  
c. Déterminer les coordonnées du point d'intersection K de (AG) et de (FIH).
5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse sera prise en considération dans l'évaluation.*  
Soit  $\Gamma$  la sphère de centre G passant par K.  
Quelle est la nature de l'intersection de  $\Gamma$  et du plan (FIH)?  
(On ne demande pas de préciser les éléments caractérisant cette intersection)

**EXERCICE 2****5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soit  $D$  la droite passant par le point A de coordonnées  $(0; 0; 2)$  et de vecteur directeur  $\vec{u}$  de coordonnées  $(1; 1; 0)$  et soit  $D'$  la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = t' \\ y = -t' \\ z = -2 \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R})$$

Le but de l'exercice est d'étudier l'ensemble  $S$  des points de l'espace équidistants de  $D$  et de  $D'$ .

**1. Une équation de S**

- a. Montrer que  $D$  et  $D'$  sont orthogonales et non coplanaires.
- b. Donner une représentation paramétrique de la droite  $D$ .

Soit  $M$  un point de l'espace de coordonnées  $(x; y; z)$  et  $H$  le projeté orthogonal de  $M$  sur  $D$ . Montrer que  $\overrightarrow{MH}$  a pour coordonnées

$$\left( \frac{-x+y}{2}; \frac{x-y}{2}; 2-z \right).$$

En déduire  $MH^2$  en fonction de  $x$ ,  $y$  et  $z$ .

Soit  $K$  le projeté orthogonal de  $M$  sur  $D'$ . Un calcul analogue au précédent permet d'établir que :  $MK^2 = \frac{(x+y)^2}{2} + (2+z)^2$ , relation que l'on ne demande pas de vérifier.

- c. Montrer qu'un point  $M$  de coordonnées  $(x ; y ; z)$  appartient à  $S$  si et seulement si  $z = -\frac{1}{4}xy$ .

**2. Étude de la surface  $S$  d'équation  $z = -\frac{1}{4}xy$**

- a. On coupe  $S$  par le plan  $(xOy)$ . Déterminer la section obtenue.  
 b. On coupe  $S$  par un plan  $P$  parallèle au plan  $(xOy)$ .  
 Quelle est la nature de la section obtenue?  
 c. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse sera prise en considération dans l'évaluation.*  
 On coupe  $S$  par le plan d'équation  $x + y = 0$ . Quelle est la nature de la section obtenue?

**EXERCICE 3**

**3 points**

**Commun à tous les candidats**

*Dans cet exercice, on demande aux candidats d'établir, en suivant la démarche proposée, deux résultats de cours.*

On rappelle que la fonction  $\ln$  est définie et dérivable sur  $]0 ; +\infty[$ , positive sur  $[1 ; +\infty[$ , et vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ln 1 = 0 \\ \text{Pour tous réels strictement positifs } x \text{ et } y, \ln(xy) = \ln x + \ln y \\ \text{Pour tout réel strictement positif } x, [\ln(x)]' = \frac{1}{x} \\ \ln(2) \approx 0,69 \text{ à } 10^{-2} \text{ près} \end{array} \right.$$

1. On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par

$$f(x) = \sqrt{x} - \ln x.$$

- a. Étudier les variations de  $f$  et en déduire que  $f$  admet un minimum sur  $]0 ; +\infty[$ .  
 b. En déduire le signe de  $f$  puis que, pour tout  $x > 1$ ,  $0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{\sqrt{x}}{x}$ .  
 c. En déduire que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ .

2. Soit  $n$  un entier naturel non nul.

On considère la fonction  $f_n$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :

$$f_n(x) = \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{n}}}.$$

En utilisant la question 1., déterminer, si elle existe, la limite en  $+\infty$  de la fonction  $f_n$ .

**EXERCICE 4**

**7 points**

**Commun à tous les candidats**

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$2y' + y = 0 \quad (E),$$

dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

2. On considère l'équation différentielle :

$$2y' + y = e^{-\frac{x}{2}}(x+1) \quad (E')$$

- a. Déterminer deux réels  $m$  et  $p$  tels que la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = e^{-\frac{x}{2}}(mx^2 + px) \text{ soit solution de } (E').$$

- b. Soit  $g$  une fonction définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

Montrer que  $g$  est solution de l'équation  $(E')$  si et seulement si  $g - f$  est solution de l'équation  $(E)$ .

Résoudre l'équation  $(E')$ .

3. Étudier les variations de la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $h(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}(x^2 + 2x)$ .
4. Déterminer les limites en  $-\infty$  et en  $+\infty$  de la fonction  $h$ .
5. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $h$  et  $\Gamma$  celle de la fonction :  $x \mapsto e^{-\frac{x}{2}}$ .
- a. Étudier les positions relatives de  $\mathcal{C}$  et  $\Gamma$ .
- b. Tracer ces deux courbes sur un même graphique.