Durée : 4 heures

Baccalauréat S Amérique du Sud Novembre 2010

Exercice 1 **5 points**

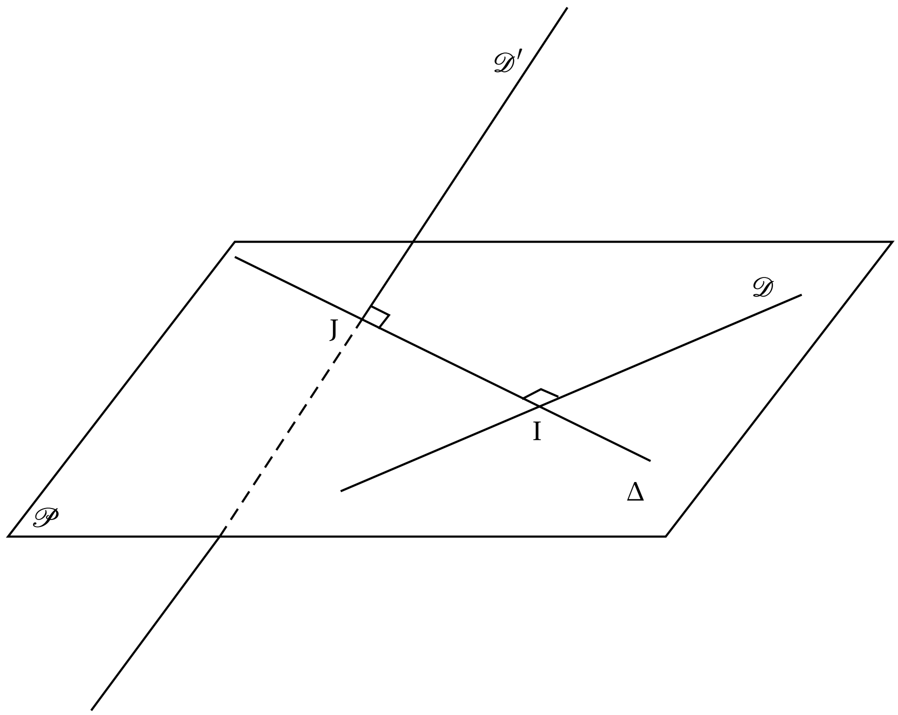
Commun à tous les candidats

On admet que si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont deux droites non coplanaires, il existe une unique droite Δ perpendiculaire à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. Si Δ coupe $\mathscr{D}$ en le point I et $\mathscr{D}'$ en le point J, la distance IJ est appelée distance de $\mathscr{D}$ à $\mathscr{D}'$.

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$.
On note $\mathscr{D}$ la droite des abscisses et $\mathscr{D}'$, la droite de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -t\\ y &=& 3+3t\\ z &=& 1-t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}.$$

1. Justifier que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas coplanaires.
2. On considère la droite Δ perpendiculaire commune à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. Prouver qu'il existe deux réels b et c tels que le vecteur $\overrightarrow{w} = b\overrightarrow{\jmath} + c\overrightarrow{k}$ soit un vecteur directeur de Δ.
3. **a.** Vérifier que le plan $\mathscr{P}$ d'équation : $-3y + z = 0$ est un plan contenant la droite $\mathscr{D}$.
   b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection J de la droite $\mathscr{D}'$ et du plan $\mathscr{P}$.
   c. Justifier que la droite passant par J, de vecteur directeur $\overrightarrow{w}$ est sécante à $\mathscr{D}$ en un point I et qu'elle est la perpendiculaire commune à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.
   d. En déduire la distance de $\mathscr{D}$ à $\mathscr{D}'$.



$\mathscr{D}'$
$\mathscr{D}$
J
I
Δ
$\mathscr{P}$

Exercice 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

Soit A, B et P les points d'affixes respectives $a = 5+5\text{i}$, $b = 5-5\text{i}$ et $p = 10$.
On considère un point M, distinct de O, d'affixe z.
On note U le point d'affixe u, image du point M par la rotation R_{A} de centre A et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{2}$.
On note T le point d'affixe t, image du point M par la rotation R_{B} de centre B et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$.
Soit D le symétrique du point M par rapport à O.

1. Démontrer que l'affixe du point U est $u = \text{i}(10-z)$; exprimer en fonction de z l'affixe du point T puis justifier que le quadrilatère $MUDT$ est un parallélogramme de centre O.
2. Déterminer l'ensemble Γ des points M d'affixe z tels que : $z\overline{z} - 5z - 5\overline{z} = 0$.
   Justifier que le quadrilatère OAPB est inscrit dans Γ.
3. On suppose que le point M est distinct de O, A et P. Les points O, M et U sont donc distincts deux à deux.
   a. Démontrer que les points O, M et U sont alignés si et seulement si $\dfrac{u}{z} = \dfrac{\overline{u}}{\overline{z}}$.
   b. Démontrer que les points O, M et U sont alignés si et seulement si M appartient à Γ.
4. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que OMU soit un triangle isocèle en O. Quelle est dans ce cas la nature du quadrilatère $MUDT$?
5. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $\dfrac{u}{z}$ soit un imaginaire pur.
   En déduire la nature du quadrilatère $MUDT$ dans le cas où M est un point de la droite (OP) privée de O et P.
   Prouver finalement qu'il existe une unique position du point M tel que $MUDT$ soit un carré.

Exercice 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $A(n) = n^4 + 1$.
L'objet de l'exercice est l'étude des diviseurs premiers de $A(n)$.

1. Quelques résultats
   a. Étudier la parité de l'entier $A(n)$.
   b. Montrer que, quel que soit l'entier n, $A(n)$ n'est pas un multiple de 3.
   c. Montrer que tout entier d diviseur de $A(n)$ est premier avec n.
   d. Montrer que, pour tout entier d diviseur de $A(n)$:

$$n^8 \equiv 1 \pmod{d}.$$

2. Recherche de critères

Soit d un diviseur de $A(n)$. On note s le plus petit des entiers naturels non nuls k tels que $n^k \equiv 1 \mod d$.

a. Soit k un tel entier. En utilisant la division euclidienne de k par s, montrer que s divise k.

b. En déduire que s est un diviseur de 8.

c. Montrer que si, de plus, d est premier, alors s est un diviseur de $d-1$. On pourra utiliser le petit théorème de Fermat.

3. Recherche des diviseurs premiers de $A(n)$ dans le cas où n est un entier pair.

Soit p un diviseur premier de $A(n)$. En examinant successivement les cas $s=1$, $s=2$ puis $s=4$, conclure que p est congru à 1 modulo 8.

4. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Appliquer ce qui précède à la recherche des diviseurs premiers de $A(12)$.

Indication : la liste des nombres premiers congrus à 1 modulo 8 débute par 17, 41, 73, 89, 97, 113, 137, ...

Exercice 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Un internaute souhaite faire un achat par l'intermédiaire d'internet. Quatre sites de vente, un français, un allemand, un canadien et un indien présentent le matériel qu'il souhaite acquérir. L'expérience a montré que la probabilité qu'il utilise chacun de ces sites vérifie les conditions suivantes (les initiales des pays désignent les évènements « l'achat s'effectue dans le pays ») :

$$P(F) = P(A), \quad P(F) = \frac{1}{2}P(C) \quad \text{et} \quad P(C) = P(I).$$

1. Calculer les quatre probabilités $P(F)$, $P(A)$, $P(C)$ et $P(I)$.

2. Sur chacun des quatre sites, l'internaute peut acheter un supplément pour son matériel. Ses expériences précédentes conduisent à formuler ainsi les probabilités conditionnelles de cet évènement, noté S :

$$P_F(S) = 0,2 \quad ; \quad P_A(S) = 0,5 \quad ; \quad P_C(S) = 0,1 \quad ; \quad P_I(S) = 0,4$$

a. Déterminer $P(S \cap A)$.

b. Montrer que $p(S) = \dfrac{17}{60}$.

c. L'internaute a finalement acheté un supplément. Déterminer la probabilité qu'il l'ait acheté sur le site canadien.

3. Sur 1 000 internautes ayant acheté ce matériel, on a établi la statistique suivante :

	Sites européens	Site canadien	Site indien
Effectif d'acheteurs	335	310	355

a. On note respectivement f_1, f_2 et f_3 les fréquences associées aux effectifs précédents. On pose :
$d^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=3}\left(f_k - \frac{1}{3}\right)^2$. Calculer d^2 puis $1\,000d^2$.

b. On simule 3 000 fois l'expérience consistant à tirer un nombre au hasard parmi $\{1~;~2~;~3\}$ avec équiprobabilité. Pour chacune de ces simulations on obtient une valeur de $1\,000d^2$. Voici les résultats :

Minimum	Premier décile	Premier quartile	Médiane	Troisième quartile	Neuvième décile	Maximum
0,000 5	0,076 3	0,211 1	0,488 45	0,940 1	1,510 4	5,925 6

Au risque 10 %, peut-on considérer que le choix d'un site européen, nord-américain ou asiatique se fait de manière équiprobable ?

Exercice 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

Le but de l'exercice est de donner un encadrement du nombre I défini par :

$$I = \int_0^1 \frac{x^2\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x}$.

1. Étudier les variations de f sur $[0\,;\,1]$.
2. On pose, pour tout entier naturel $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{5}\right)$.
   a. Justifier que pour tout entier k compris entre 0 et 4, on a :
   $$\frac{1}{5}f\left(\frac{k}{5}\right) \leqslant \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{5}f\left(\frac{k+1}{5}\right)$$
   Interpréter graphiquement à l'aide de rectangles les inégalités précédentes.
   b. En déduire que : $\dfrac{1}{5}S_4 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{5}(S_5 - 1)$.
   c. Donner des valeurs approchées à 10^{-4} près de S_4 et de S_5 respectivement.
   En déduire l'encadrement : $1,091 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant 1,164$.
3. **a.** Démontrer que pour tout réel x de $[0\,;\,1]$, on a : $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{1+x}$.
   b. Justifier l'égalité $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x + I$.
   c. Calculer $\displaystyle\int_0^1 (1-x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.
   d. En déduire un encadrement de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x$ d'amplitude strictement inférieure à 10^{-1}.